کتاب راهنمای تدریس

ریاضی

سال دوم دوره اول متوسطه

مؤلفان:

حمیدرضا امیری، زهره پندی، خسرو داودی، ابراهیم ریحانی، خسرو آبادی، سید صالحی و میر شهرام صدر

۱۳۹۳

بخش ۱

دیدگاه های آموزشی

و

کلیات برنامهٔ درسی

ریاضی ابتدایی

دیدگاه های آموزشی

مقدمه

در آموزش ریاضی دو دیدگاه متفاوت وجود دارد. دیدگاه برنامه درسی تبیینی بر آموزش ریاضی برای حل مسئله بود. در این دیدگاه ابتدا مفاهیم مطرح می شد، سپس روش ها و تکنیک ها تدریس می شد و پس از کسب مهارت در به کار بردن آنها دانش آموزان آماده پاسخ گویی به مسئله ها می شدند. در این طرز تفکر، هدف از آموزش مفاهیم و دانش های ریاضی این بود که دانش آموزان بتوانند مسئله حل کنند. در واقع اگر سؤال می شد که چرا دانش آموزان باید ریاضی یاد بگیرند، پاسخ این بود که باید ریاضی یاد بگیرند تا بتوانند مسئله ها را حل کنند. در برنامهٔ درسی جدید آموزش ریاضی دیدگاه دیگری مد نظر قرار گرفته است. در این رویکرد آموزش ریاضی از طریق حل مسئله اتفاق می افتد یعنی کار با حل کردن مسئله ای که ذهن دانش آموز را درگیر می کند شروع می شود: در صورتی که آنها بتوانند مسئله را حل کنند و به ابعاد مختلف آن فکر کنند، دانش و محتوای ریاضی در ذهن آنها ساخته شده و کم کم شکل می گیرد. این اتفاق با دو شرط محقق می شود. اول آنکه مسئلهٔ طرح شده امکان زایش و تولید مفاهیم مختلف را داشته باشند و به قدر کفایت ذهن دانش آموزان را درگیر کنند. شرط دوم این است که دانش آموزان توانایی حل مسئله را داشته باشند.

به جهت تقویت توانایی حل مسئله آموزش راهبردها مورد توجه قرار می گیرد. در برنامهٔ فعلی درس ریاضی، آموزش راهبردها در دورهٔ ابتدایی کامل می شود. آنها با ۸ راهبرد آشنا می شوند و امید داریم آموزش این راهبردها به آنها کمک کند تا بتوانند بهتر مسئله ها را حل کنند.

فصل اول کتاب ریاضی پایهٔ هفتم این ۸ راهبرد را مرور می کند. دلیل قرار گرفتن این فصل در ابتدای کتاب درسی ریاضی هفتم این است که فرض می شود دانش آموزان راهبردها را در دبستان یاد گرفته اند و در این قسمت آنها را مرور می کنند تا با توانایی کسب شده در حل کردن مسئله ها بتوانند دیدگاه آموزش از طریق حل مسئله را محقق کنند.

اغلب فعالیت های مطرح شده در شروع درس های کتاب های ریاضی هفتم و هشتم به نوعی یک مسئله هستند و انتظار داریم که دانش آموزان با کمک راهبردهایی که آموختند بتوانند این مسئله ها را حل کنند و یا به عبارت دیگر فعالیت را به نتیجه برسانند و فرایند حل کردن مسئله و انجام فعالیت به آنها کمک کند تا مفاهیم تازه را دریابند و در ذهن خود دانش های تازه را بسازند و به آموخته های قبل خود پیوند بزنند.

با توجه به مطالب فوق، مرور این دیدگاه و محورهای اصلی مورد نظر در برنامهٔ درسی جدید ریاضی که براساس آن کتاب های درسی تألیف شده اند ضروری به نظر می رسد. در ادامه به طور مختصر با این محورها و دیدگاه ها بیشتر آشنا می شوید.

دانش مفهومی و دانش رویه ای

از عواملی که نقشی تعیین کننده در عملکرد ریاضی دانش آموزان دارد، دانش ریاضی آنها است. دانش ریاضی نیز با توجه به تقسیم بندی محققان، براساس نوع به دانش مفهومی و رویه ای[۱] دسته بندی شده است. دانش مفهومی دانشی است که در روابط غنی است و می تواند به عنوان یک شبکه ی مرتبط دانش تصور شود، شبکه ایی که در پیوند روابط بین تکه های مجزا ی اطلاعات پر اهمیت هستند، حقایق و موضوعهای مجزا بوسیله ی تعدادی شبکه به هم پیوند داده می شوند. در صورتی که دانش رویه ای بر دو نوع است: نوع اول شامل یک آشنایی با نمادهای مجرد از سیستم می باشد و نوع دوم شامل قوانین یا رویه هایی برای حل مسائل ریاضی است.

نتایج تحقیقاتی که در مورد نحوه ی تدریس معلمان کشورهای شرکت کننده در آزمون تیمز مانند ژاپن و آمریکا انجام گرفته، نشان می دهد که «تدریس ژاپنی به عنوان تدریس عمیق تر ریاضی شناخته می شود. دانش آموزان در ژاپن به همان اندازه که وقت صرف کسب مهارت ها می کنند، به همان اندازه وقت خود را صرف حل مسائل چالش برانگیز و بحث راجع به مفاهیم ریاضی نیز می نمایند. در صورتی که در آمریکا معلمان به تعاریف حاضر و رویه ها تمایل دارند و از دانش آموزان انتظار دارند تا آنها را تمرین کنند و بیشتر وقت دانش آموزان صرف تمرین مهارت های منفک از هم می شود». این اختلاف در نحوه ی تدریس این دو کشور می تواند یکی از دلایل عمده ی تفاوت عملکرد دانش آموزان ژاپنی با دانش آموزان آمریکایی باشد. به طوری که دانش آموزان ژاپنی در این آزمون بین المللی موفقیت بالاتری نسبت به دانش آموزان آمریکایی کسب کرده اند. به عبارت دیگر روش های یاددهی که تنها دانش آموزان را با الگوریتم ها و رویه ها بدون ایجاد هیچ گونه زمینه های ارتباطی بین آنها درگیر می کند، عملکرد دانش آموزان را تحت تأثیر قرار می دهد و دانش آموزان را وابسته به رویه ها و الگوریتم های منفک از هم می نماید.

هیبرت و هاندا (۲۰۰۴)، در پژوهشی، یک بررسی از رویکردهای یاددهی شش کشور شرکت کننده در آزمون تیمز ۱۹۹۹ انجام دادند. آنها نوارهای ویدئویی کلاس های درس این کشورها را از لحاظ یاددهی مفهومی و رویه ای تحلیل کردند و متوجه ی نکته ی جالبی شدند. دو کشور ژاپن و هنگ کنک که هر دو در آزمون تیمز موفقیت بالایی کسب کرده بودند، رویکردهای یاددهی کاملا متفاوتی داشتند. نتایج نشان دادند که ۸۴ درصد مسائل درس در هنگ کنگ به عنوان استفاده از رویه ها ارائه شدند، در حالی که ۴۱ درصد مسائل درس در ژاپن به عنوان استفاده از رویه ها ارائه شدند. همچنین، اکثریت مسائل در ژاپن به صورت ایجاد ارتباطات بین مطالب در قالب مسائلی وابسته به دانش مفهومی ارائه شدند. هیبرت و هاندا در

---

[۱] - Conceptual and Procedural Knowledge

هنگام بررسی روش یاددهی در هنگ کنگ متوجه شدند که با وجود نتایج ذکر شده، معلم رویه ها را به صورت منفصل و جدا از هم عنوان نمی کند، بلکه سعی دارد رویه ها را به صورت مرتبط با هم مطرح نماید و سؤالاتی در ارتباط با مقایسه ی رویه ها، شباهت ها و تفاوت های آن ها از دانش آموزان می پرسد. آن ها متوجه شدند در روش تدریس معلم پیوندهای مفهومی نیز مشاهده می شود.

زمانی که دانش آموزان از ارتباطات بین قوانینی که به کار می گیرند، آگاهی داشته باشند، این قوانین را به صورت خودبخودی و ناآگاهانه به کار نمی برند و در زمان مناسب می توانند از قوانین یا استراتژی های مناسب استفاده کنند یا حتی رویه های لازم را بسازند. وقتی دانش آموزان دانش مفهومی مناسبی از مطلب داشته باشند، باید بتوانند انواع مسائل مرتبط با آن را حل کنند. کسانی که درک کافی از مطلب مورد نظر ندارند، برای حل هر نوع مسئله ای مرتبط با مطلبی که پیش از این با آن مواجه نشد ه اند، به رویّه های جدید ی نیاز دارند که معلم به آ ن ها معرفی می کند. بنابراین به نظر می رسد دیدگاه و نگرش معلم دربارۀ مسائل جدید، نقش تعیین کننده ای در توسعه دانش مفهومی و رویّه ای دانش آموزان ایفا می کند. در آزمونی برای مطالعه عملکرد ریاضی دانش آموزان و بررسی تفاوت سطوح دانش آن ها، تعدادی از سؤالات تیمز (۲۰۰۳) مورد استفاده قرار گرفت [۷]. نمونه ای از این سؤالات و نیز بررسی راه حل های دانش آموزان ارائه می شود.

اعداد در **دنباله**... ، ۲۳ ، ۱۹ ، ۱۵ ، ۱۱ ، ۷ چهار تا چهار تا افزایش می یابند . در **دنباله** ... ، ۳۷ ، ۲۸ ، ۱۹ ، ۱۰ ، ۱ هم اعداد نه تا نه تا افزایش پیدا می کنند . عدد ۱۹ در هر دو **دنباله** مشترک است . اگر این دو **دنباله** همین طور ادامه داشته باشند ، عدد مشترک بعدی چه عددی است؟

همه دانش آموزان به جز یک نفر برای پیدا کردن عدد مشترک بعدی از روش ادامه دادن اعداد استفاده کردند .اما یکی از آنان را ه حل جالبی به کار برد؛ او کوچک ترین مضرب مشترک میان ۴ و ۹ را پیدا کرد و سپس مضرب مشترک مورد نظر را به عدد مشترک اولی در دو دنباله(۱۹) اضافه نمود و عدد مشترک بعدی) (۵۵را به دست آورد. دانش آموزی که از راه حل دوم استفاده کرده است، ابتدا با دانش مفهومی عمیق خود، صورت مسئله را درک کرده، سپس کوشیده است تا رویّه ای برای حل مسئله خلق کند .دانش آموز برای ایجاد این رویّه، به دانش رویّه ای عمیقی نیاز دارد تا بتواند استراتژی مناسبی برای حل مسئله پیدا کند .با این وصف، نمی توان مرز میان دانش مفهومی و روی هّای این دانش آموز را در ارتباط با ریاضیات موجود در این سؤال تعیین کرد و نمی توان گفت این دانش آموز فقط دانش مفهومی عمیق یا فقط دانش روی هّای عمیق دارد .این راه حل، همبستگی دانش مفهومی و روی هّای درسطح عمیق را نشان می دهد .راه حل این دانش آموز در شکل ؟ ارائه شده است.

$$۴ \sqcup ۹ = ? \quad ۴ \sqcup ۹ = ۱ \Rightarrow \frac{۴ \times ۹}{۱} = ۳۶ \quad \Rightarrow ۴ \sqcup ۹ = ۳۶$$

$$۱۹ + ۳۶ = ۵۵$$

شکل راه حل دانش آموز با استفاده از روش محاسبه کوچکترین مضرب مشترک

استانداردهای فرآیندی

شورای ملی معلمان ریاضی در کتاب اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه ای پنج استاندارد فرآیندی را در کنار پنج استاندارد محتوایی برای تدریس موثر ریاضیات ارائه می کند. استانداردهای محتوایی (اعداد و عملیات، جبر، هندسه، اندازه‌گیری و تحلیل داده ها و احتمال) ریاضیاتی را که باید در هر پایه تدریس شود را مشخص می کنند و استانداردهای فرآیندی روش ها ی کسب دانش محتوایی را مورد بحث قرار می دهند. در ادامه خلاصه ای از استانداردها فرآیندی تشریح شده است[۱۵]. در مورد استاندارد حل مسئله جزییات بیشتری در بخش بعدی آمده است.

استاندارد فرآیندی	برنامه های آموزشی از پیش دبستان تا پایه دوازدهم باید همه دانش آموزان را قادر سازد تا:
حل مسئله	۱. دانش جدید ریاضی را از مسیر حل مسئله بسازند و بنا کنند . ۲. مسئله هایی که از درون ریاضیات و از دیگر زمینه ها ناشی می شوند را حل کنند. ۳. گستره ی متنوعی از راهبردهای مناسب برای حل کردن مسئله ها را به کار گیرند و سازگار کنند. ۴. روی فرآیند حل مسئاله ریاضی کنترل و بازبینی و بازتاب فکورانه داشته باشند.
استدلال و اثبات	۱. استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی ریاضیات بشناسند؛ ۲. - حدسیه‌های ریاضی بسازند و آنها را مورد بررسی قرار دهند؛ ۳. - بحث ها و اثبات های ریاضی را تکمیل و ارزیابی کنند؛ ۴. روش‌های مختلف استدلال و اثبات را انتخاب نمایند و به کار گیرند

اتصال	۱. ارتباطات رادرمیان ایده های ریاضی بشناسند و استفاده کنند. ۲. بفهمند که چگونه ایده های ریاضی در ارتباط هستنند و با یکدیگر ساخته می شوند تا یک کل منسجم را تولید کنند. ۳. ریاضیات را در زمینه های بیرون از ریاضی بشناسند و بکار برند.
گفتمان	۱. تفکر ریاضی خود را از طریق گفتمان سازماندهی و تثبیت کنند. ۲. تفکر ریاضی خود را بطور منسجم و واضح برای هم سالان، معلمان و سایرین توضیح دهند. ۳. تفکر ریاضی و استراتژی های دیگران را تحلیل و ارزیابی کنند. ۴. با استفاده از زبان ریاضی ایده های ریاضی را بطور دقیق بیان کنند.
بازنمایی	۱. بازنمایی‌ها را برای سازماندهی، ثبت و انتقال ایده‌های ریاضی تولید کند و به کار برد. ۲. از بین بازنمایی‌ها ی ریاضی برای حل مسئله گزینش کند، به کار برد و ترجمه کند. ۳. بازنمایی‌ها ی ریاضی را برای مدل‌سازی، تفسیر پدیده‌های ریاضی، اجتماعی و فیزیکی به کار برد.

همان گونه که در اصول و استانداردها تاکید شده است استانداردهای فرآیندی، ماهیتی متفاوت از مباحث و موضوعات مختلف ریاضی دارند، ولی هر یک از آن‌ها در فرآیند یادگیری ریاضی در همهٔ پایه‌های تحصیلی مدرسه حاکم هستند. این استانداردها مشخص می کنند که به چه شیوه ای ریاضیات مورد نظر باید تدریس شود و چگونه دانش آموزان با انجام دادن ریاضیات می توانند آن را فرا گیرند. در کتاب های جدید ریاضی سعی شده است که راهبرد های مختلف حل مسئله آموزش داده شود و در برخی موارد روش های مختلف حل یک مسئله ارائه شود. این کار می تواند در بسیاری از مواقع موجب تولید یک پاسخ تازه توسط دانش آموز برای همان مسئله شود و باعث کمرنگ شدن ایده "تنها یک روش حل برای هر مسئله" گردد. همچنین وقتی از دانش آموز خواسته می شود که روش های حل مسئله دیگران را توضیح دهد تقویت

قدرت استدلال و گفتمان ریاضی را به دنبال خواهد داشت. علاوه بر این راه حل های مختلف ارتباط و اتصال بین موضوعات و مفاهیم مختلف ریاضی را به دانش آموزان نشان می دهد. دانش آموزان باید یاد بگیرند که در مورد تفکرات دوستانشان با یکدیگر و با معلم گفتگو کنند و ضمن دفاع از ایده خود آن را به زبانی که برای همسالانشان قابل فهم است مطرح کنند. در این بحث ها امکان برطرف شدن اشکالات و بدفهمی ها وجود خواهد داشت. در کنار این ها دانش آموزان روش های دیگری برای حل مسائل به غیر از شیو های خودشان را فرا می گیرند. استاندارد های فرآیندی نباید به صورت مجزا و منفک از یکدیگر مورد توجه قرار گیرند. آن ها از یک طرف در سراسر محتوای ریاضی مدرسه ای جریان دارند و از طرف دیگر یک ارتباط و اتصال درونی بین خودشان برقرار است. عمل تدریس باید به صورت متوازن و منسجم از این استانداردها بهره گیرد.

برخی اوقات تغییرات کوچکی در بیان مسئله می تواند به کودکان کمک کند تا حدسیه سازی را یاد بگیرند. مثلا به جای آنکه بگوییم "نشان دهید که با دوبرابر کردن داده ها، میانگین داده ها نیز دوبرابر می شود." می توانیم بگوییم "فرض کنید تمام داده های یک نمونه دوبرابر شوند، آیا میانگین داده ها تغییر می کند؟ اگر تغییر می کند مقدار آن چقدر است؟ چرا؟" وقتی دانش آموزان بتوانند ایده های ریاضی را به هم مربوط کنند یادگیریشان عمیق تر و پایدار تر می شود. توانایی خواندن، نوشتن، گوش دادن، فکر کردن و گفتمان درمورد مسائل، درک دانش آموزان از ریاضیات را توسعه می دهد و تعمیق می بخشد.

گفتمان یک بخش اساسی از آموزش ریاضی است. گفتمان یک راه به اشتراک گذاری ایده ها و واضح کردن درک و فهم است. از طریق گفتمان، ایده ها هدف بازتاب، پالایش، بحث و اصلاح و تجدید نظر قرار می گیرند. فرایند گفتمان همچنین به مفهوم بخشی و ماندگاری ایده ها کمک می کند و به عمومی سازی آنها کمک می کند. هنگامی که دانش آموزان درگیر فکرکردن و استدلال ریاضی شوند و نتایج تفکر خود را با دیگران بصورت شفاهی یا کتبی به گفتمان بگذارند، آنها واضح و شفاف بودن و متقاعد کننده بودن را یاد می گیرند. گوش دادن به توضیحات دیگران به دانش آموزان فرصتهایی را برای توسعه درک و فهم خود فراهم می نماید. گفتگوهایی که در آنها ایده های ریاضی از جنبه های گوناگون مورد کاوش قرار می گیرد به شرکت کنندگان کمک می کند تا تفکرات خود را دقیق نمایند و بین ایده ها ارتباط و اتصال ایجاد کنند. دانش آموزانی که در بحث هایی مشارکت می کنند که در آنها راه حل ها را به ویژه در برابر نظرات مخالف توجیه می کنند در جریان تلاش برای متقاعد کردن همکلاسی های خود در مورد نقطه نظر خودشان، درک بهتری از ریاضیات بدست می آورند (هوتانو و ایناگاکی ۱۹۹۱). چنین فعالیتی همچنین به دانش آموزان کمک می کند تا یک زبان برای تشریح ایده های ریاضی را توسعه دهند و نیاز به صراحت در آن زبان را درک کنند. دانش آموزانی که فرصت ها، دلگرمی و حمایت برای صحبت، نوشتن، خواندن و گوش دادن

در کلاس ریاضی را دارند منفعتی دوگانه کسب می کنند: آنها گفتمان می کنند تا ریاضی را یاد بگیرند و یاد می گیرند تا ریاضی وار گفتمان کنند[۱۵].

حل مسئله

مسئله به موقعیتی اطلاق می شود که درآن، فرد چیزی را طلب می کند، ولی نمی داند که چطور به طور مستقیم به آن دست یابد [۳]. موقعیت های مسئله آن هایی هستند که در آن ها افراد دسترسی به یک روش حل کم و بیش از قبل آماده شده را ندارند. تسلط بر ریاضیات، یعنی توانایی و مهارت در حل مسئله ها، ضمنا نه تنها در مسئله های عادی و قالبی، تسلط بر ریاضیات بیشتر به معنای داشتن استقلال اندیشه، عقل سلیم و نیروی نو آفرینی است [۳]. مسئله از دید پولیا عبارت است از « ضرورت جست وجوی آگاهانه ی وسیله ی مناسبی، برای رسیدن به هدفی، ولی در بدو امر غیر قابل دسترس. حل مسئله، به معنای پیدا کردن این وسیله است». بنابر این "حل مسئله" با آنچه که به طور معمول در کلاس های درس ریاضی در مدارس با عنوان "مسئله حل کردن" رواج دارد، تفاوت جدی دارد. در حقیقت بیشتر مواقع دانش آموزان در حال تمرین و یا کاربرد یک دستور، روش یا الگوریتم یا مانند آن هستند.

شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM[۲]) در سند اصول و استانداردها بـرای ریاضـیات مدرسـه (۲۰۰۰) ، حل مسئله را درگیر شدن در وظیفه، تکلیف و فعالیتی می داند کـه روش حـل آن از پـیش شـناخته شـده نیست، به این خاطر برای یافتن راه حل، دانش آموزان باید آن را از درون دانش خودشان بیرون بکشـند و از مسیر این فرایند آنها اغلب درک و فهم های جدید ریاضی را رشد و توسعه خواهنـد داد. از ایـن منظـر حـل کردن مسئله ها فقط یک هدف یادگیری ریاضی نیست، بلکه یک ابـزار و روش اصـلی و فراگیـر انجـام دادن ریاضیات است. دانش آموزان باید فرصت های فراوان و متواتری برای صورت بندی کردن، دست و پنجه نـرم کردن و حل کردن مسائل پیچیده ای که نیازمند و مستلزم تلاش و کوشش است، داشته باشند و پس از آن ترغیب و تهیج شوند که روی تفکرشان بازتاب و عکـس العمـل داشـته باشـند(اصـول و اسـتانداردها بـرای ریاضیات مدرسه، ۲۰۰۰). استرنبرگ[۳](۲۰۰۵)، حل مسئله را این گونه تعریف می کند: حل مسئله شامل کار ذهنی برای غلبه بر موانعی است که سر راه دستیابی به هدف قرار دارد[۱۷].

---

۲ National Council of Teachers of Mathematics

۳Sternberg

همان گونه که پولیا مطرح می کند مسئله می تواند پیچیده یا ساده باشد. در حالت اول پیدا کردن راه حل آن دشوار است و در حالت دوم آسان. ضمنا دشواری راه حل تا حد زیادی، به خود مفهوم مسئله مربوط می شود، آن جا که دشواری نباشد، مسئله ای وجود ندارد. تعریف مسئله دارای یک ماهیت نسبی است. به این معنی که امکان دارد آنچه برای یک فرد مسئله به حساب می آید برای فرد دیگری تنها یک تمرین ساده به حساب آید و یا آنچه که در یک زمان برای فرد مسئله محسوب می شده است در زمانی دیگر تنها یک یادآوری به حساب آید. ضمنا دشواری و چالش موجود در مسئله باید به تفکر و ذهن برگردد و نه اینکه تنها به یک مشکل محاسباتی مربوط شود. به هر حال باید توجه داشت که تمایل فرد به درگیر شدن و تفکر بر روی یک مشکل و دشواری نیز اهمیت دارد. به عبارت دیگر مسئله باید "مسئله دانش آموز" هم باشد و نه اینکه تنها مسئله مولفان کتاب های درسی و یا معلمان باشد.

مسئاله حل کن های کارا و واقعی بطور مداوم آنچه را که انجام می دهند بازبینی و کنترل می کنند و اصلاح می نمایند. آنها مطمئن می شوند که مسئله را می فهمند. اگر مسئله ای نوشته شده باشند ان را با دقت و با توجه عمیق می خوانند، اگر مسئله بطور شفاهی گفته شود، آنها آنقدر سوال می پرسند تا آن را بفهمند. مسئله حل کن های کارا و واقعی به کرات نقشه می ریزند. پژوهش ها مشخص می کنند که شکست ها یا عدم موفقیت های حل مسئله دانش آموزان غالبا مربوط به فقدان دانش ریاضی آن ها نیست، بلکه متعلق است به استفاده ناموثر و ناکارای آنچه که آن ها می دانند[۱۵].

نقش و هدف حل مسئله در برنامه درسی

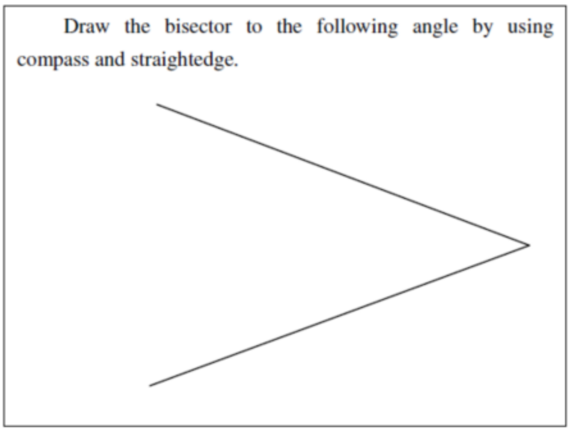
شرودر و لستر[۴] در مورد نقش و هدف حل مسئله در برنامه درسی سه دسته بندی را مشخص کرده اند [۸]:

- تدریس برای حل مسئله[۵] (تدریس محتوای ریاضی برای کاربرد بعدی در حل مسائل ریاضی). در این نوع روش تدریس، معمولا معلم محتوا و مفاهیم و الگوریتم های اولیه ریاضی را قبل از آن که یاد گیرندگان نیاز به آن ها را در حین حل مسئله احساس کنند، به آنها ارائه می دهد. سپس آنها با دانستن آن مفاهیم و فرمول ها و روش ها به حل مسئله می پردازند(گویا، ۱۳۷۷).

[۴] Schroeder, Lester
[۵] Teaching *for* problem solving

- تدریس در باره حل مسئله[۶] (تدریس استراتژی های رهیافتی بـرای رشـد توانـایی عمـومی در حـل مسائل). در این نوع روش تدریس معلم رهیافت هایی نظیـر آن چـه کـه پولیـا بـرای حـل مسـئله پیشنهاد می کند را به دانش آموزان آموزش می دهد.
- تدریس از راه حل مسئله[۷] (تدریس محتوای استاندارد ریاضی به وسیله ی ارائه مسائل غیـر روتـین در بردارنده این محتوا). در این نوع روش تدریس معلم معمولا مسئله ای از دنیای واقعی، که شامل مفهوم ریاضی در نظر گرفته شده برای تدریس است را مطرح می کند و دانش آمـوزان ضـمن حـل این مسئله دانش ریاضی مورد نظر را نیز فرا می گیرند.

در کتاب اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه آمده است که برنامه های آموزشی از پیش دبستان تا پایه دوازدهم باید همه دانش آموزان را قادر سازد که دانش جدید ریاضی را از مسیر حل مسئله بسازند و بنا کنند و مسئله هایی که از درون ریاضیات و از دیگر زمینه ها ناشی می شوند را حل کنند. چگونه حل مسئله می تواند به فراگیران کمک کند،ریاضیات را یاد بگیرند ؟ مسئله های خوب این شانس را به دانش آموزان می دهد که آنچه را می دانند تحکیم بخشند و توسعه دهند و هنگامی که خوب انتخاب شده باشد میتواند محرک و برانگیزاننده ی یادگیری ریاضیات باشد. به طور مثال مبحث رسم نیمساز(شکل؟)، زاویه مطابق برنامه درسی ملی جاری ژاپن در پایه هفتم آموخته می شود(شیمیزو،۲۰۰۹).

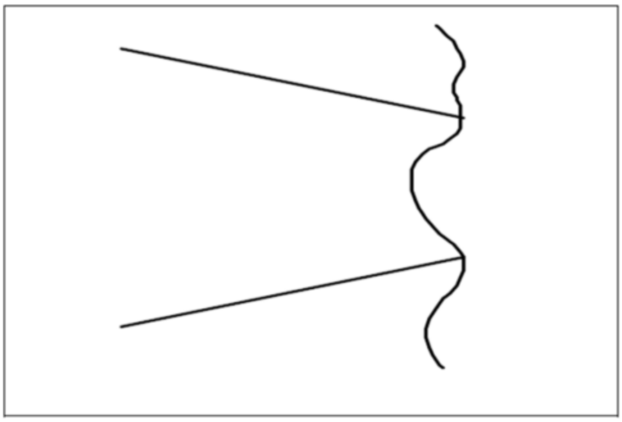


The angle bisector problem

اکنون مسئله زیر را در نظر بگیرید:

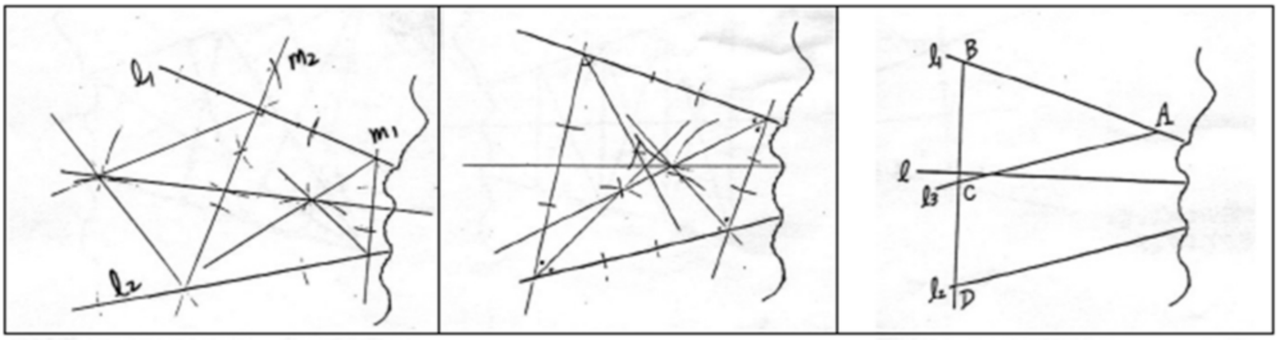
وقتی که شما می خواستید نیمساز زاویه را به کمک خط کش و پرگار رسم کنید، کاغذ مانند شکل زیر پاره شد. آیا هنوز هم می توانید نیمساز همان زاویه را رسم کنید.

۶ Teaching *about* problem solving
۷ Teaching *through* problem solving

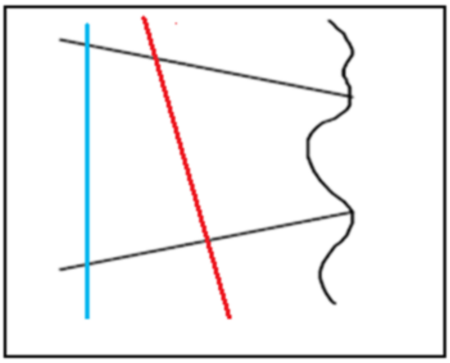


The angle bisector problem revised

راه حل های متفاوت دانش آموزان سال نهم (ژاپنی) برای مسئله (شیمیزو، ۲۰۰۹) فوق در شکل(؟) نشان اده شده است.



راه حل زیر توسط یک معلم ایرانی ارائه شده است. سعی کنید آن را توضیح دهید. در حقیقت ایده اصلی حل در این نکته نهفته است که نیمسازهای داخلی یک مثلث همرس می باشند.



با وجود تقاضاها و درخواست ها به روی آوردن به رویکرد های حل مسئله در آموزش ریاضی، انتقال از آموزش حقایق و رویه های ریاضی به آموزش همراه با تاکید بر فهم و درک ریاضی و مهارت های تفکر، کند و مشکل بوده است. بسیاری از معلمان مجاب نشده اند که شیوه های سنتی باید کنار گذاشته شوند. اکثر آن هایی هم که مایل به تغییر هستند، اطمینان ندارند که چگونه باید این کار را انجام دهند(مکینتاش وجرت،۲۰۰۰).

دانش آموزان برخی از کشورها مانند ژاپن نتایج مناسبی در ارزیابی های بین المللی کسب کرده اند. در توضیح چرایی این نتیجه، بررسی ها نشان می دهد که کلاس های درس ریاضی ژاپن اختلافات اساسی با سایر کشورها دارد. علی رغم اینکه در برنامه ی درسی فعلی ژاپن به واژه ی حل مسئله توجه چندانی نشده است، عمده فعالیت های کلاس درس ریاضی این کشور پیرامون حل مسئله شکل گرفته است و جالبتر اینکه در کلاس های درس مختلف ریاضی ژاپن، روش تدریس کمابیش مشابهی در جریان است، روشی که شاید بتوان گفت منحصر به ژاپن است [۸].

معلمان ژاپنی از حل مسئله به عنوان یک رویکرد قوی برای تدریس ریاضی استفاده می کنند. چند ویژگی بارز در رویکرد ژاپنی ها نسبت به حل مسئله وجود دارد. یکی از این ویژگی ها این است که کلاس حل مسئله در ژاپن حتی بعد از اینکه هر کدام از دانش آموزان به راه حل مسئله دست پیدا کردند، تمام نمی شود. معلمان ژاپنی بر این باورند که بخش اصلی هر درس زمانی شروع می شود که دانش آموزان جواب مسئله را پیدا می کنند. بعد از اینکه دانش آموزان جواب های خود را ارائه می دهند ، معلم بحث گسترده ای را با آنها شروع می کند و شباهت ها و تفاوت های راه حل هایی که دانش آموزان به آن رسیده اند را با هم مقایسه می کند. یکی از اختلافات اساسی بین فعالیت های کلاسی در ایران با ژاپن و سنگاپور در این است که در کشور ما وقتی از دانش آموزان خواسته می شود که بر روی مسائل به صورت فردی کار کنند قبلاً مثال مشابهی برای آنها در کلاس حل شده است، اما در ژاپن و سنگاپور معلم روش حل مسئله را به دانش آموزان نشان نمی دهد [۸].

انتخاب و دنبال کردن شیوه های مناسب ،اصلاح و ترمیم انتخابهای نا مناسب و درکل وارسی و نظارت دقیق بر فرایند حل مسئله هر دو به یک اندازه اهمیت دارند. در بررسی موضعی می توان به اشتباهاتی که در اثر بی توجهی رخ داده است پی برد. در بررسی کلی با مروری بر حل مسئله ممکن است روش های دیگری بدست آید، ارتباط با موضوع آشکار شود که به ظاهر نامربوط به نظر می رسد و گاهی تکنیک مفیدی به دست آید که شخص بتواند آن را به رهیافت کلی مسئله حل کردن خود بیفزاید.
تکلیف حل مسئله "خوب" دارای ویژگی های زیر است (مکینتاش و جرت،۲۰۰۰):

- دانش آموز را درگیر و علاقه مند می سازد،
- قابل کاربرد در جهان واقعی است،
- با علائق دانش آموز مرتبط است،
- مساوات را رعایت می کند زیرا همه دانش آموزان را در بر می گیرد،
- درگیری فعالان را ارتقا می بخشد،
- حاوی محتوای ریاضی مهمی است،
- با سایر مسئله ها و مفهوم های ریاضی مرتبط می شود،

- در راستای برنامه درسی ریاضی جاری است،
- با سایر حوزه های موضوعی تلفیق می شود،
- باز-پاسخ و غیر معمولی است،
- امکان استفاده از رویکردها و راه حل های چند گانه را ایجاد می کند،
- به سادگی با استفاده از یک رویه ی از پیش آموخته شده، قابل حل نیست،
- چالش برانگیز و در عین حال قابل دست یابی توسط دانش آموزان است،
- نیازمند پافشاری است،
- به خوبی طرح شده است،
- حاوی واژه های شفاف و بدون ابهام است،
- انتظارات را شرح می دهد،
- پاسخ های قابل نمره دادن را بر می انگیزد.

آموزش تجسم - محور

شواهد تجربی محکم نشان می دهند که بین مهارت های ادراکی تجسمی و توانایی ریاضی[۸] و بین درک تجسمی و دستیابی ریاضی و بین بازنمایی تجسمی (یعنی استفاده از تصاویر یا نمودار ها) و موفقیت در حل مسئله ریاضی روابط معناداری وجود دارند (ریورا،۲۰۱۱).

یک هدف عمده از آموزش ریاضیات به دانش آموزان توسعه درک ریاضی و رشد توانایی حل مسئله آن ها است. بسیاری از مردم دریافته اند که بخشی از اندیشیدن به شیوه تجسمی[۹]صورت میگیرد. تجسم متضمن همان باز نماییها[۱۰]وفرایندهای ادراک است(فینک[۱۱] ۱۹۸۵، نقل شده از اسمیت[۱۲] و دیگران ۲۰۰۳). از گذشته های دور نقش تجسم در یاد دهی و یادگیری ریاضیات به طور عام و نقش آن در حل مسئله ریاضی به طور خاص مطرح بوده است. با این حال در سالیان اخیر، این موضوع به طور عمیق تری توسط آموزشگران ریاضی مورد مطالعه قرار گرفته است. در سند اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه ای[۱۳] اعتقاد بر این است که تجسم نقشی مهم در حل مسئله های ریاضیات دارد. بنابراین «دانش آموزان باید برای

---

[۸] Visual Perceptual Skills And Mathematical Ability
[۹] Visual
[۱۰] Representation
[۱۱] Fink
[۱۲] Smith
[۱۳] Principles and standards for school mathematics

به کارگیری انواع بازنماییهای تجسمی و هماهنگ ساختن آنها برای تحلیل مسئله ها و موضوعات ریاضی، کسب تجربه کنند»(NCTM،۲۰۰۰ ص۴۲). در همین راستا معلم و روش تدریس او به منزله ی عنصرهای اصلی در فرایند آموزش از اهمیت خاصی برخوردارند. اگر چه عملکرد دانش آموزان در حل مسئله می تواند تحت تأثیر عوامل متفاتی قرار گرفته باشد، اما روش آموزش، نقشی اساسی بر عهده دارد.

آلبرت انیشتین[۱۴] (۱۹۵٤) در نامه ای به آدامار[۱۵] چنین اظهار می دارد که بیشتر در غالب تصاویر ذهنی، به موضوعات فکر می کند و به کار گیری لغات در اولویت های بعدی قرار دارند(فنما[۱٦] ۱۹۷۹، نقل شده از ویزدو[۱۷] ۱۹۹۲). او گفته است که به ندرت در قالب کلمات می اندیشد بلکه افکارش را در صورت های کم و بیش روشنی که به دلخواه قابل باز آفرینی و ترکیب هستند شکل می دهد. برخی از ریاضیدانان پا را فرا تر گذاشته و ادعا می کنند که انجام همه تکالیف ریاضی به تفکر فضایی[۱۸] نیاز دارد(ولنر[۱۹] ۲۰۰٤). تجسم وتصور در تاریخ شکل گیری مفاهیم ریاضی دارای اهمیتی خاص می باشد. برای اثبات این ادعا می توان به اثبات قضیه ی فیثاغورس، توسط شخص فیثاغورس اشاره نمود. بنابراین انکار اهمیت تفکر تجسمی به معنای قطع ریشه های تاریخی شکل گیری مفاهیم ریاضی است. اما توجه بیش از حد به تدریس کلامی[۲۰](توصیف زبانی درس ها و اطلاعات آموزشی) موضوع باعث می شود ریاضیات در حد کلام باقی بماند(همان منبع). البته چارچوب مدون و کاملی برای تدریس مبتنی بر تفکر تجسمی در دسترس معلمان قرار ندارد. به علاوه مشکل فقط در نحوه تدریس نیست، بلکه کتاب های درسی نیز آن گونه که شایسته است به این موضوع نپرداخته اند. بیشاب[۲۱] (۱۹۸۳) در این باره می گوید:« دانش آموزان به پردازشهای تجسمی علاقه دارند، در حالی که متأسفانه معلمان و متون درسی آنها را تحریک نمی کنند». از دیدگاه او ریاضیات مدرسه ای به محاسبات تبدیل شده است و "یک دانش آموز میتواند بدون نیاز به سامان دهی تفکرات تجسمی خود دریادگیری ریاضیات مدرسه ای موفقباشد"(پرزمگ[۲۲]،۱۹۸٦). یکی از مهمترین دغدغه های آموزشگران ریاضی، ضعف دانش آموزان در استفاده از تفکر تجسمی در حل مسئله های ریاضی و یا در آموزش جبر، به ویژه در دوره ی راهنمایی، است(ریورا[۲۳]،۲۰۱۱). در کشور ما نیز این

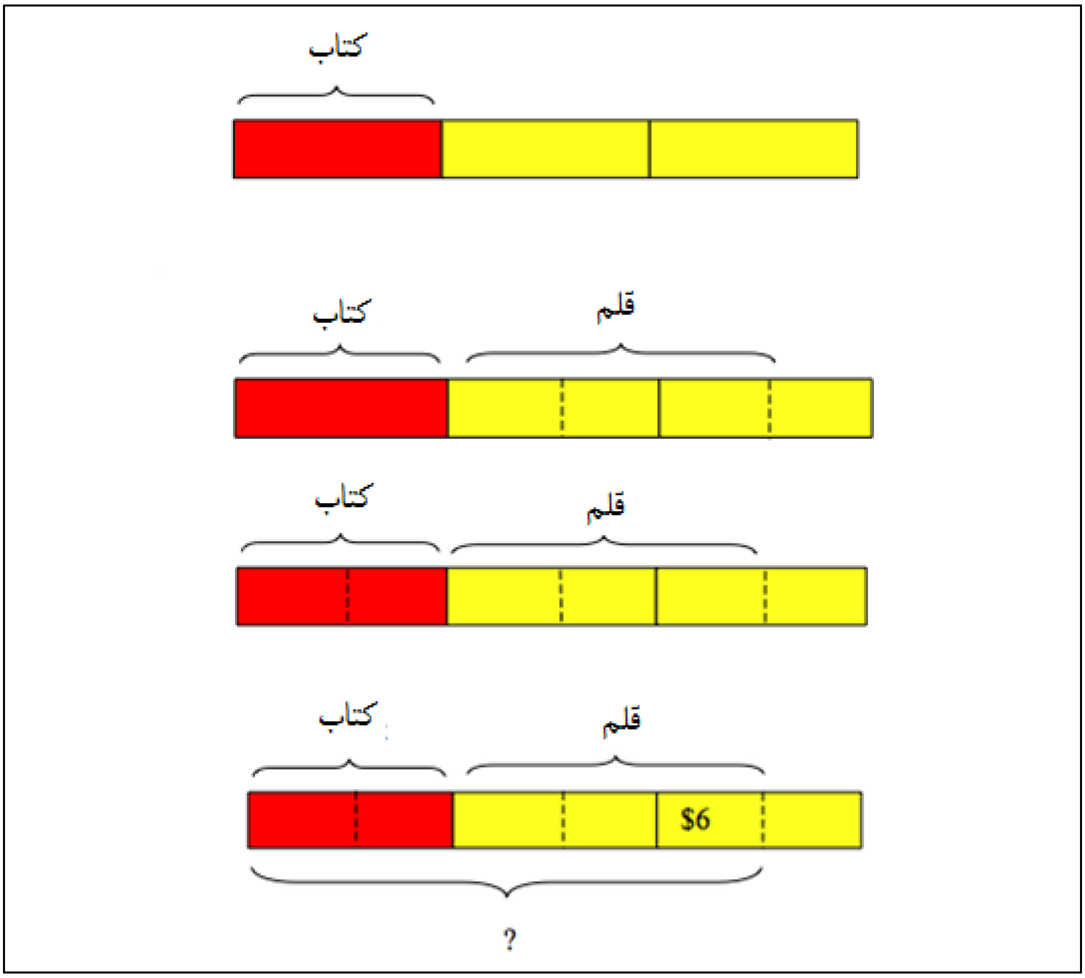
[۱۴] Albert Einstein
[۱۵] Hadmar
[۱٦] Fenema
[۱۷] Hvizdo
[۱۸] Spatial thinking
[۱۹] Woolner
[۲۰] Verbal teaching
[۲۱] Bishop
[۲۲] Presmeg
[۲۳] Ferdinand Rivera

نگرانی ها وجود دارد، زیرا ارزیابی های بین المللی مانند آزمون تیمز TIMSS[۲۴] حکایت از عملکرد ضعیف دانش آموزان دوره ی راهنمایی کشورمان در حل مسئله ی ریاضی دارد(کیامنش ۱۳۷۹). این تحقیق در پی آن است که ابتدا چارچوبی برای تدریس به روش تجسم محور را ارائه نماید، سپس تأثیر آموزش با تأکید بر تجسم و آموزش بدون تأکید بر تجسم را بر عملکرد حل مسئله ریاضی دانش آموزان مورد بررسی قرار دهد و نیز نگرش دانش آموزان مورد پژوهش را نسبت به ریاضیات با هم مقایسه نماید.

حل مسئله و تفکر تجسمی

۱. می هوا با ۱/۳پولش کتاب خرید. او ¾ باقیمانده پولش را صرف خرید یک قلم کرد. اگر قیمت قلم ٦ دلار بیشتر از کتاب باشد، او روی هم چقدر خرج کرده است؟(از کتاب درسی پایه ۵ سنگاپور)

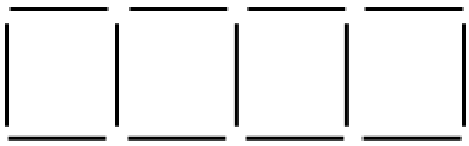
حل این مسئله به کمک یک معادله تصویری در ادامه ارائه شده است.



[۲۴] Trends in international mathematics and science study

شکل٦

۲. شکل زیر با تعدادی چوب کبریت ساخته شده است.



الف) برای ساختن ۵ مربع، چه تعداد چوب کبریت لازم است؟

ب) برای ساختن۱۰ مربع، چه تعداد چوب کبریت لازم است؟

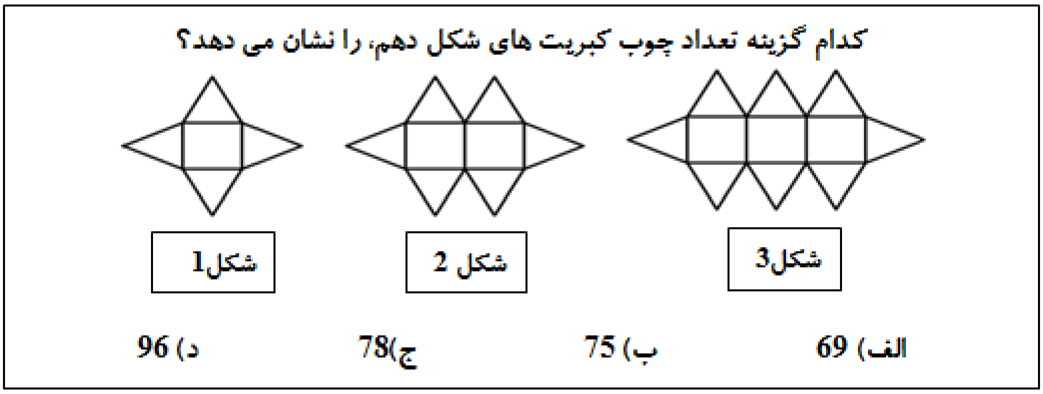
ج) برای ساختن n مربع، چه تعدا د چوب کبریت لازم است؟ اگر می توانید روش خود را توضیح دهید.

دانش آموزان نظم موجود در الگوها را به شیوه های مختلف مشاهده و با استدلال های متفاوتی بیان می کنند.پژوهش در باره الگو یابی و تعمیم لااقل در دهه گذشته به شکل تجربی این دیدگاه قابل توجه، اگر چه اساسی را ثابت کرده است که افراد مایلند که یک الگوی یکسانP را به طور متفاوتی ببینند و پردازش کنند. در نتیجه این بدان معناست که آن ها تعمیم های متفاوتی را برای Pارائه می دهند (ریورا و بیکر،۲۰۱۱). بیشتر راه حل های درست این مسئله با استفاده از تجسم بوده است(جدول۲). علاوه بر این تلفیق راهبردها و استفاده از بیش از یک راهبرد توسط دانش آموزان قابل توجه است(ریحانی و صدیقی ۱۳۹۰).

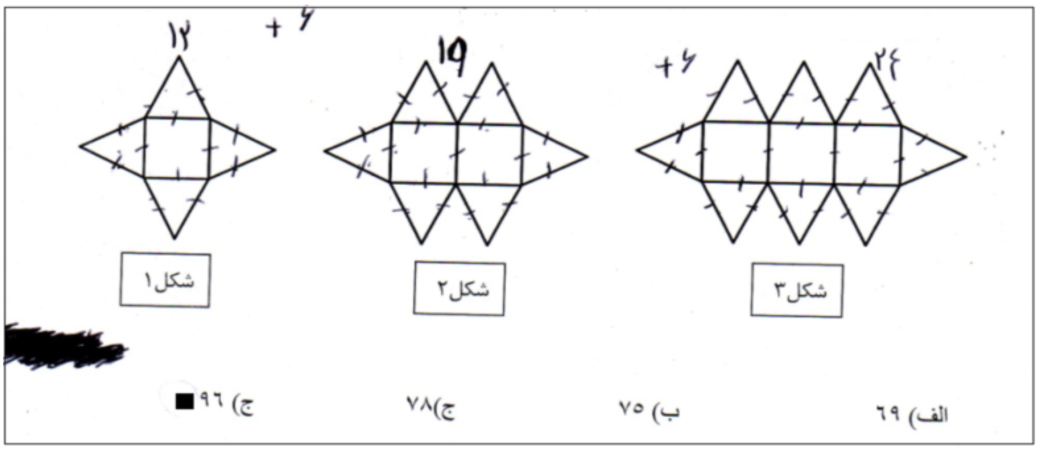
جدول۲: دانش آموزان موفق از روش های متفاوتی تعمیم را بدست آورده اند

عبارت جبری	عبارات هم ارزشکل n ام	روند ۴,۷,۱۰,۱۳, ...	ایده راه حل	شماره راه حل
$3n+1$	$1+n.3$	۱+۳, ۱+۲.۳, ۱+۳.۳, ۱+۴.۳, ...	روابط عددی	۱
$3n+1$	$1+n.3$	۱+۳, ۱+۲.۳, ۱+۳.۳, ۱+۴.۳, ...	تفکر تجسمی	۲
$3n+1$	$n.4-(n-1)$	۴, ۲.۴-۱, ۳.۴-۲, ۴.۴-۳, ...	تفکر تجسمی	۳
$3n+1$	$n+n+(n+1)$	۱ ۲ ۳ ۱ ۲ ۳ , ... ۲ ۳ ۴	تفکر تجسمی	۴
$3n+1$	$(n+1).2+(n-1)$	(۱+۱).۲, (۲+۱).۲+۱, (۳+۱).۲+۲, (۴+۱).۲+۳, ...	تفکر تجسمی	۵
$3n+1$	$n+(2n+1)$	۴=۱+۳, ۷=۲+۵, ۱۰=۳+۷, ۱۳=۴+۹, ...	روابط عددی	۶
$3n+1$	$4+3(n-1)$	۴, ۴+۱.۳, ۴+۲.۳, ۴+۳.۳, ۴+۳.۳, ...	تفکر تجسمی	۷
$3n+1$	$(n+n+1)+n$	(۱+۱+۱)+۱, (۲+۲+۱)+۱, (۳+۳+۱)+۱, ...	روابط عددی	۸

۳. باید تعادلی مناسب، بین شیوه ی تدریس تجسمی و غیر تجسمی بر قرار گردد، زیرا توجه بیش از حد به هر کدام از روش های تدریس ارائه شده، موجب بد فهمی دانش آموزان می گردد. از این رو پرزمگ(۱۹۸٦ و ۲۰۰٦b) روش تلفیقی (آموزشی که در آن هم از تفکر تجسمی استفاده می شود و هم زبان جبری ریاضیات در نظر گرفته می شود) را پیشنهاد می نماید. در شکل(۸) به دلیل عدم توجه دانش آموز به راه حل های تجسمی مسئله، و با تکیه ی بر راه حل عددی از حل مسئله (شکل۷) باز مانده است. البته عکس این موضوع نیز مشاهده شده است یعنی اینکه دانش آموز به خاطر تکیه ی بیش از حد بر راه حل تجسمی خود نتوانسته همان مسئله را حل نماید(ریحانی، حاجی بابایی و عرب زاده۱۳۹۰).



شکل۷: مسئله چوب کبریت ها

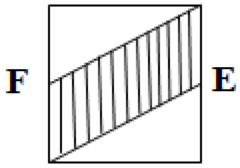


شکل۸: راه حل نادرست دانش آموز برای تعداد چوب کبریت ها

٤. تدریس به شیوه تجسمی باعث درک شهودی و شناخت کل نگر از مفهوم می گردد. بعلاوه آنها زمان کمتری را برای حل مسئله صرف می کنند. پاسخ یکی از دانش آموزان (شکل۱۰) به مسئله ی مساحت (شکل۹) این ادعا را نشان می دهد(ریحانی، حاجی بابایی و عرب زاده۱۳۹۰).

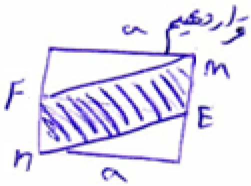
شکل مقابل مربعی به ضلع a را نشان می دهد. نقاط E و F وسط اضلاع قرار دارند. مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟

الف) $\frac{a}{2}$ ب) $\frac{a^2}{4}$ ج) $\frac{a}{4}$ د) $\frac{a^2}{2}$



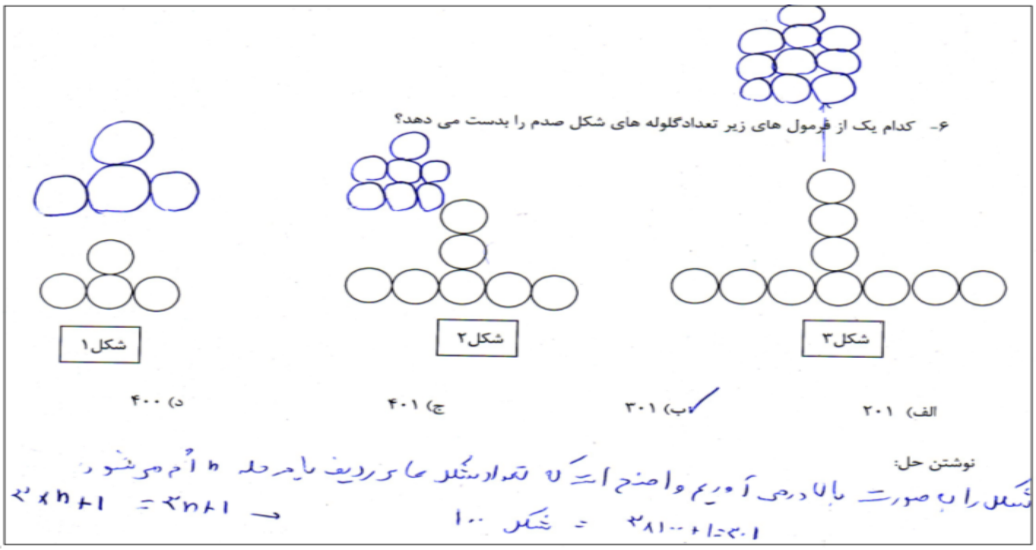
شکل۹: مسئله ی مساحت

نوشتن حل: اگر مثلث FEm را زیر مثلث FEn وارد هیم قسمت مشکی نصف مربع می شود



(شکل ۱۰): استفاده از راه حل های تجسم محور زمان لازم برای حل مسئله را کاهش می دهد.

٥. می توان گفت، دانش آموزانی که به روش تجسم محور، آموزش می بینند، می توانند یک مسئله را از دیدگاه های متفاوت، مورد بررسی قرار دهند و این موضوع ایجاد راه حل های متفاوت را در پی خواهد داشت. بعلاوه آنها بسیار ساده تر می توانند روابط بین اجزای تشکیل دهنده ی فرمول ها را تشخیص دهند. دانش آموزانی که به این روش آموزش می بینند بهتر می توانند، جمله ی عمومی دنباله های شکلی را تشخیص دهند. در شکل شکل۱۱ تجسم دانش آموز او را به جمله ی عمومی درست، راهنمایی می کند(ریحانی، حاجی بابایی و عرب زاده۱۳۹۰).



شکل۱۱: حل تجسمی مسئله ها، باعث دیدن یک مسئله از منظر های متفاوت می شود.

تدریس جبر با استفاده از ظرفیت حساب در دوره های ابتدایی، تاکید بر بازنمایی های مختلف، استفاده از تفکر تجسمی و به طور خاص معادله های تصویری برای حل معادله های جبری، تاکید بر فرآیند تعمیم و استفاده از ظرفیت موجود در الگو های عددی و هندسی و نیز برقراری ارتباطی مستحکم بین جبر و حساب با ارائه همزمان رویکرد های جبری و حسابی برای حل مسئله است. شورای معلمان ریاضی آمریکا وکانادا(NCTM۲۰۰۰) اظهار می دارد که با درنظر گرفتن جبر به عنوان یک استاندارد در برنامه درسی دبستان، معلمان می توانند به دانش آموزان کمک کنند تا بنیادی محکم از درک و تجربه، برای کارهای پیچیده در جبر دوره راهنمایی و دبیرستانی پیداکنند. تجربه اعداد و ویژگی هایشان، پایه ای برای کارهای

بعدی با نمادها و عبارات جبری طراحی می کند و دانش آموزان، با یاد گرفتن این که، مسائل اغلب می توانند با کاربرد ریاضی شان توضیح داده شوند، اهمیت کاربرد ریاضی را در مسائل روزمره درک می کنند و پس از کشف روابط بین موضوعات و خلق مدلی درست برمبنای اصول حاکم بر ریاضیات می توانند مدل را تعمیم دهند و درحل مسائل دیگر استفاده کنند. فوجی (۲۰۰۳) معتقد است که دانش آموزان از دوره ابتدایی می توانند با تفکر جبری، از طریق عبارات قابل تعمیم آشنا شوند. این جنبه اساسی در تفکر جبری باید به طور منظم در همه مراحل تحصیلی مد نظر باشد. او بیان می کندکه استدلال های جبری فرصت های ویژه ای نیاز دارندکه باید در برنامه درسی ریاضی پایه های ابتدائی طراحی شوند و مورد استفاده قراربگیرند تا درصورت نیاز، به معلمان و دانش آموزان در دیدن عبارات جبری کمک کنند. شبه متغیر[۲۵]ها با تعمیم عبارات جبری، دربسیاری از مسائل ریاضی ابتدائی و راهنمایی می توانند مورد استفاده قرار بگیرند.

از آنجایی که بسیاری از دانش آموزان چرایی بسیاری از عملکردهای معلمان را درک نمی کنند و خود را با حفظ مطالب قانع می سازند، باید گفت که توجه مناسب بر رویکرد تجسمی می تواند این مشکل را مرتفع سازد. البته نمی توان گفت که رویکرد مبتنی بر تجسم می تواند از تدریس غیرتجسمی پیشی بگیرد. بلکه می توان نتیجه گرفت که روش تدریس باید بگونه ای باشد که هم شامل رویکردهای تجسمی و هم شامل رویکردهای غیرتجسمی باشد. افراط و یا تفریط از هر طرف، موجبات نقص در درک دانش آموزان را فراهم خواهد نمود. همچنین باید توجه داشت که دانش آموزانی که با رویکرد تجسمی آموزش می بینند دارای نگرش بهتری نسبت به ریاضیات هستند.

مسائل مربوط به الگوهای شکلی باعث ایجاد تصویرهای ذهنی متفاوت و فهم ارتباط بین متغیرهای جمله عمومی شکل n ام می گردد و نتیجه آن افزایش توانایی تجسم و درک بیشتر متغیرهای جبری است. معلمان با تدوین مباحثی مانند الگویابی روابط جبری در اشکال می توانند از تجرد موضوعات جبری بکاهند و مسائل آن را قابل فهم تر نمایند . همه دانش آموزان از این قدرت(توانایی فضایی) تاحدی برخوردارند (بیشاب، ۱۹۸۳). اما با توجه به اینکه در مدارس نسبت به این توانایی، اهمیت کمی داده می شود موجبات تضعیف آن فراهم شده است. استفاده از مسائلی که کاملاً شهودی و هندسی است ولی برای حل آنها نیازی به کارگیری زبان رسمی ریاضی نیست، می تواند ما را در رسیدن به این مهم یاری رساند. پرورش مهارت های نمودارخوانی، ترسیم و تجزیه تحلیل شکل ها: عدم توانایی دانش آموزان در ترسیم و

[۲۵] .quasi variable

مهارتهای جدول خوانی و تفسیر نمودارها، باعث شده که در بسیاری از مواقع از دست یابی به جوابهای صحیح بازمانند. بنابراین توجه بیشتر معلمان به این موضوع می تواند باعث پیشرفت عملکرد حل مسئله در دانش آموزان گردد.

استفاده از روش های تجسمی و غیرتجسمی برای حل مسائل: توجه بیش از حد به رویکرد غیرتجسمی در حل مسائل باعث تضعیف انعطاف پذیری ریاضیات می شود و توجه بیش از حد به رویکرد تجسمی باعث قطع ارتباط با زبان رسمی ریاضیات می گردد. بنابراین معلمان باید سعی کنند هر دو روش را برای حل مسائل مورد توجه قرار دهند. آنها باید سؤالاتی را تدوین نمایند که بتوان به هر دو صورت در مورد آنها فکر نمود. تعمیم به صورت تجسمی باعث ایجاد فرمولهای مختلف می شود که خود باعث بسط معانی فرمولها و عبارتهای معادل می گردد (ریورا، ۲۰۱۱ و۲۰۰۷).

معلمان باید به دانش آموزان، در جهت کنترل تجسم خود، یاری رسانند و گوشزد کنند که تجسم بی مورد می توانند مانع تفکر ثمربخش گردد(اسپینوال و شاو ۲۰۰۲). به عبارت دیگر «رویکرد تدریس مبتنی بر تجسم نوشداروی جهانی نیست» (پرزمگ ۱۹۸٦). پژوهش ها (شونفیلد۱۹۸۷، گارفالو و لستر۱۹۸۵، نقل شده از NCTM،۲۰۰۰) مشخص می کنند که شکست ها یا عدم موفقیت های حل مسئله دانش آموزان مربوط به فقدان دانش ریاضی آنها نیست بلکه به استفاده نامؤثر از آنچه که به کار می گیرند بستگی دارد.

ریاضیاتی که بدون پیوند با زندگی واقعی و بدون استفاده از زمینه های مناسب تدریس می شود، فرصت انتقال تصویر های ذهنی واقعی را از یاد گیرنده سلب می کند، در نتیجه باور دانش آموزان را نسبت به خود، متزلزل می گرداند. همچنین ریاضیات را از دیدگاه این افراد، دست نیافتنی، غیرواقعی و نامفهوم می نماید. توجه به جنبه های تجسمی موضوع های ریاضی می تواند پیوندی طبیعی بین ریاضیات و تفکر معمولی هر فرد را ایجاد نماید. به کارگیری روش های تجسم محور در حل مسئله، دشوار تر از روش های غیر تجسمی است (نژاد صادقی ۱۳۷٦، بوربا ۲۰۰۵). بنابراین دانش آموزان هنگام حل مسئله رغبت کمتری برای استفاده از روش های تجسم محور، از خود نشان می دهند. دلیل این وضعیت به ماهیت روش های تجسم محور باز نمی گردد بلکه به عادت های فکری دانش آموزان که غالباً با روش های رفتارگرایانه ی غیر تجسمی شکل گرفته است باز می گردد.

راهبرد های حل مسئله – راه حل های متفاوت

امروزه از دانش آموزان انتظار می رود که گستره ی متنوعی از راهبردهای مناسب برای حل کردن مسئله ها را به کار گیرند. برنامه های درسی بسیاری از کشورها مانند چین، ژاپن و آمریکا بر استفاده دانش آموزان از راهبرد های متفاوت حل مسئله تاکید دارند. راهبردهایی که در آموزش ریاضیات مدرسه ای می توانند استفاده شوند، شامل بکارگیری شکل، جست وجو ی الگو، فهرست کردن همه حالت های ممکن، بررسی مسئله با مقادیر یاحالت های خاص ،کار رو به عقب ، حدس زدن و آزمودن ، تولید یک مسئله معادل و خلق یک مسئله ی ساده تر و مانند آن هستند . یک سوال واضح و بدیهی این است که چگونه باید این راهبردهارا آموزش داد؟ بیست واندی استراتژی نیرومند عنوان شده در کتاب چگونه مسئله حل کنیم(پولیا)، در حقیقت از دویست سیصد استراتژی ضعیف تر اما عملا مفید تشکیل یافته است. این استراتژی ها را می توان یاد داد اما زیادبودن تعداد آن ها خود مشکل تازه ای می آفریند. شما باید بدانید ازاین سیصد تکنیکی که بالقوه در اختیار دارید، کدام یک را در چه مواقعی می توان به کار بست. اگر ندانید که چگونه از روشها استفاده کنید، دانستن روش درست کمک چندانی نخواهد کرد. راهی که پژوهش ها برای حل این مشکل پیشنهاد می کنند، تاکید بر روی تعداد کمتری راهبرد در زمان بیشتر و در عوض عمق بخشیدن به فرآیند حل مسئله است. به طور نمونه راهبرد رسم شکل خود شامل تنوعی از راهبرد های جزیی تر است. در نتیجه این امکان وجود دارد که یک مسئله به کمک یک راهبرد معین و از چندین روش حل شود و در عین حال به کمک راهبرد دیگری نیز از چند روش حل شود. در اینجا مثال هایی را برای توضیح بیشتر ارائه می کنیم.

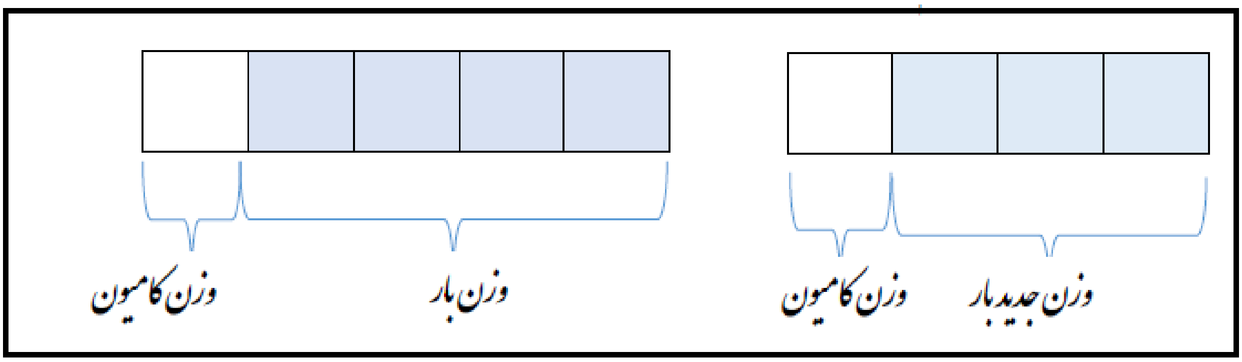
مثال ۱. وزن یک کامیون خالی ۲۰۰۰ کیلوگرم است. بعد از قرار دادن بار در داخل این کامیون، بار قرار داده شده ۸۰ ٪ وزن کامیون و بار است.در اولین توقف ، $\frac{1}{4}$ بار تخلیه میشود. بر این اساس، چند درصد وزن کامیون و بار را بار، تشکیل داده است[۵]؟

راه حل اول- راهبرد جبری:

بار خالی شده $\frac{1}{4}\times 8000=2000$ وزن بار $x=8000$ $\frac{80}{100}=\frac{x}{x+200}$

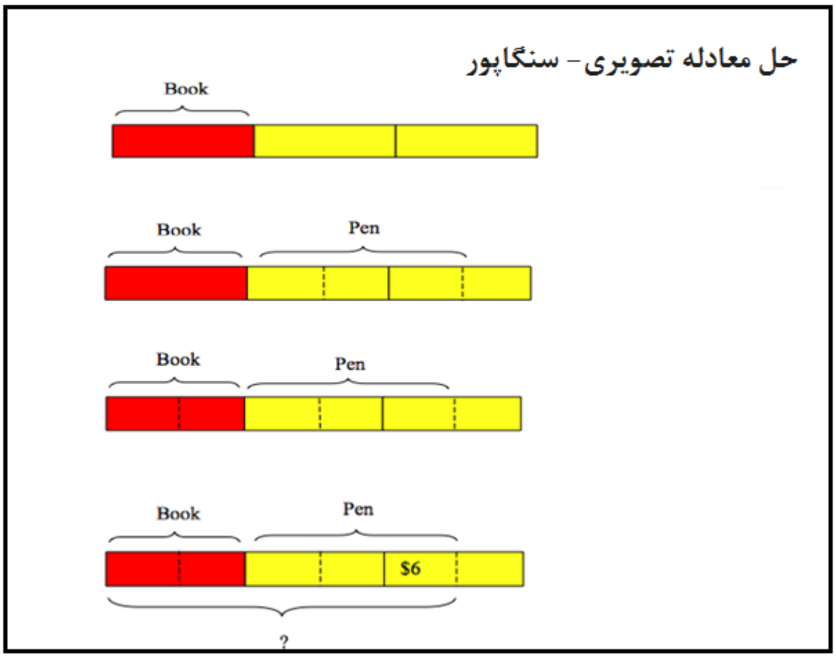
$x=75\%$ $\frac{6000}{8000}=\frac{x\ \text{بار}}{100\ \text{بار و کامیون}}$ بار باقی مانده $8000-2000=6000$

راه حل دوم راهبرد رسم شکل:



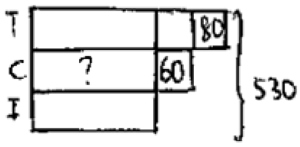
راه حل ها را باهم مقایسه کنید. شما چه راه حلی را پیشنهاد می کنید؟

مثال ۲. دانش آموزی $\frac{1}{3}$ پولش را کتاب خرید و $\frac{3}{4}$ از باقیمانده پول را صرف خرید یک قلم کرد. اگر ارزش قلم ۶ دلار بیشتر از قیمت کتاب باشد، روی هم چقدر پول خرج کرده است؟



از ۱۵۱ دانش آموز سنگاپوری پایه ۵ خواسته شده بود که مسئله "وسائل" را حل کنند، که نزدیک به نیمی از آن ها به طور صحیح رویکرد معادله تصویری را برای حل مسئله به کار بردند(کای و همکاران، ۲۰۱۱).

- **در یک حراجی خانم تان ۵۳۰ دلار باری یک میز، صندلی و اتو پرداخت. قیمت صندلی ۶۰ دلار بیشتر از قیمت اتو بود. قیمت میز ۸۰ دلار بیشتر از قیمت صندلی بود. قیمت صندلی چقدر بود؟**



$80 + 60 = 140$
$140 + 60 = 200$
$530 - 200 = 330$
$330 \div 3 = 110$
$110 + 60 = \$170$

سعی کنید برای مثال های اخیر راه حل های دیگری نیز ارائه کنید. در سال ۱۹۸۳ وزارت آموزش سنگاپور به طور رسمی در برنامه درسی ریاضی ابتدایی راهیابی شامل رسم نمودار را مطرح کرد. این راهیاب به عنوان ابزاری برای حل مسائل حسابی، همچنین مسائل جبری، مسائل کلامی شامل اعداد صحیح، کسر، نسبت و درصد در نظر گرفته شده بود (کاو، ۱۹۸۷) اعتقاد بر این بوده که اگر دانش آموزان با ابزاری برای تجسم یک مسئله کلامی مجهز شوند- که آن را تبدیل به یک مسئله ساده کلامی حسابی یا جبری می

کند- ساختاری که شالوده مسئله را پی ریزی نموده است آشکارمی شود. هنگامی که کودکان ساختار مسئله را درک کنند احتمال بیشتری وجود دارد که آن را حل کنند (کاو،۱۹۸۷).

همان گونه که دریافت از راه دو حس مختلف را ترجیح می دهیم، به همان گونه متقاعد شدن از راه دو استدلال متفاوت را ترجیح می دهیم(پولیا). اطلاع از اینکه مسائل می توانند با راه های مختلف حل شوند در روشی که دانش آموزان با مسائل برخورد می کنند تاثیر خواهد گذاشت. دانش آموزی که فکر می کند تنها یک "راه درست" برای حل مسئله وجود دارد ممکن است که روی مسئله خاصی مدتی فکر کند و اگر توفیقی حاصل نکرد آن را رها کند و منتظر بماند تا در کلاس تکنیک حل به او ارائه شود و این الگویی است که بیشتر دانش آموزان ما در مدرسه بکار می گیرند. شاگردی که فکر می کند جا برای کشف ریاضی وجود دارد و از آن استفاده می کند، احتمال زیاد دارد که با مسئله بیشتر در گیر شود، پیوند هایی برای خودش پیدا کند و شاید به یک راه حل غیر منتظره ای دست یابی پیدا نماید([۴]).

مسئله باز پاسخ

در بیشتر مواقع مسائل رایج مورد استفاده در تدریس و همچنین کتاب های ریاضی در دوره های ابتدایی و متوسطه یک ویژگی مشترک دارند که یک و تنها یک پاسخ صحیح دارند. مسائل به گونه ای فرمول بندی شده اند که پاسخ ها صحیح یا غلط هستند و پاسخ صحیح یکتاست. این گونه مسائل را بسته یا کامل می نامند (شیمادا و بکر، ۱۹۷۷).

در حل مسئله پاسخ - باز مسئله چندین پاسخ احتمالی خواهد داشت که می توان آن ها را به چندین روش به دست آورد و تمرکز نه بر روی پاسخ مسئله، بلکه بر شیوه های رسیدن به پاسخ است (مکینتاش وجرت،۲۰۰۰). یکی از فواید تکلیف بازپاسخ نسبت به بسته پاسخ این است که به سهولت قابل استفاده برای کلاس های ناهمگن است زیرا دانش آموزان می توانند تکلیف را در سطوح متفاوت و روش های متفاوت پی گیری کنند. نشان داده شده عموما تکالیف باز پاسخ برای گستره وسیع تری از دانش آموزان قابل دسترس تر از مثال های بسته هستند. مسئله ی بازپاسخ مسئله ای است که پاسخ های صحیح متعددی برای آن وجود دارد و دانش آموزان می توانند در سطحی که مناسب است، به آن پاسخ دهند و سطح معمول درک خود را نشان دهند(کای کو، ۲۰۰۹).

شیمادا و بکر بیان می کنند در رویکرد باز پاسخ، معلم یک موقعیت مساله به دانش آموزان می دهد که راه حل ها و جواب ها لزوما تنها به یک روش تعیین نمی شوند. سپس معلم، فرصت استفاده از تنوع رویکرد ها را فراهم می سازد که به دانش آموزان تجاربی می دهد در یافتن یا کشف چیزهای جدید با ترکیب همه ی دانش، مهارت ها و راه های ریاضی از تفکر که قبلا یاد گرفته اند.

مسائل معمول در ریاضی معمولا هدف خاصی را دنبال می کنند، در حالی که یک سوال باز است که برای حل یک مساله یا معما در عرصه ای وسیع تر به کار گرفته می شود. یک مساله مشخص دارای نقطه ای پایانی است اما مساله باز پاسخ در طیف گسترده ای عمل می کند و نقطه ی پایانی دورتری دارد؛ شیمادا و بکر دریافتند آموزش مفاهیم بالاتر چون مشتق و انتگرال به دانش آموزان لزوما به معنای استفاده دانش آموزان از فرایندهای پیچیده تر ذهنی و مهارت های ریاضی نیست به طور مثال یک دانش آموز ابتدایی می تواند در مقایسه با دانش آموز متوسطه در برخورد با یک مساله یکسان از عملکردهای پیچیده تر ذهنی استفاده کند.

شیمادا و بکر بیان می کنند فعالیت های باز پاسخ ریاضی برای کمک به دانش آموز ساخته شده اند تا: به طور مناسبی موقعیت ها را به یک موقعیت ریاضی تبدیل کنند؛ قانون ها و روابط ریاضی را به وسیله استفاده مناسب از آنها دریابند؛ مسائل را حل کنند؛ نتایج را بررسی کنند؛

در حالی که: اکتشافات و روش های سایرین را می بیند؛ ایده ها متفاوت را مقایسه و بررسی می کند؛ ایده ها را اصلاح کرده وبه گسترش ایده هایشان کمک می کنند.

فونگ نیز ویژگی های زیر را برای این که سوالی باز پاسخ ریاضی نامیده شود، بر می شمرد:

فاقد روش قطعی

فاقد جواب قطعی یا جواب های ممکن بسیار

قابل حل به روش های متفاوت و سطوح متفاوت (ترکیب توانایی های در دسترس)

ارائه فضایی به شاگردان برای تصمیم سازی و راه تفکر ریاضی طبیعی

گسترش مهارت های گفتمان و استدلال

شکوفایی خلاقیت و تخیل شاگردان

مرتبط به زمینه ی زندگی تجارب واقعی

مثالی از مسئله بسته پاسخ : نمرات ۸ دانش آموز در یک آزمون ریاضی به شرح زیر است :

۶۳، ۴۲، ۵۵، ۵۴، ۴۴، ۴۸، ۵۲ و۴۲

میانگین نمرات را بدست آورید

مثال هایی از مسئله باز- پاسخ:

۱. ۸ عدد بیابید که میانگین آنها ۵۰ باشد .
۲. ۸ عدد متمایز بیابید که میانگین آنها ۵۰ شود.
۳. جاهای خالی را با اعداد طوری پر کنید که داستان معنا دار شود:

مدرسه ای یک دنباله ی ریاضی برای بردن دانش آموزان به باغ و وحش برنامه ریزی کرده است. تعداد اتوبوس های مورد نیاز برای آوردن دانش آموزان به باغ وحش A است. نسبت تعداد دانش آموزان به تعداد معلمان در دنباله ی ریاضی B به ۱ است. C دانش آموز و D معلم در دنباله ی ریاضی وجود دارند. با افزودن رانندگان اتوبوس و مدیر E نفر در دنباله ریاضی وجود دارند E .را بیابید(کای کو،۲۰۱۱).

E باید مساوی A+C+D+۱ باشد .

یکی از راه حل های ممکن این است, A=۲ , B=۱۰ , C=۶۰ , D=۶ , E=۶۹

دیگر راه حل ممکن A=۳ , B=۱۲ , C=۹۶ , D=۸, E=۱۰۸ است.

۴. کدامیک از اعداد زیر با بقیه متفاوت است؟

۱۵, ۲۰, ۲۳, ۲۵

دانش آموزان از پایه های مختلف پاسخ های متفاوتی به این سوال می دهند. به طور مثال:

- ۲۰ زیرا تنها عدد زوج در بین بقیه اعداد است.
- ۲۵ زیرا مربع کامل است.
- ۲۳ زیرا عددی اول است.
- ۱۵ زیرا یکان آن فرد است.
- ۱۵ زیرا حاصلضرب دو عدد اول دو قلو (۳ و ۵) است.
- ۲۰ زیرا حاصلضرب ارقام آن صفر است.
- ۲۳ زیرا سه تای دیگر (۲۵و ۲۰ و ۱۵) اضلاع یک مثلث قائم الزاویه هستند.
- ۱۵ زیرا حاصلضرب ارقام آن فرد است.
- ۲۵ زیرا بر خلاف سه تای دیگر نمایش ساعتی از شبانه روز نیست.
- ... نظر شما چیست؟

مثال- نمونه بسته مساله

مربع هایی با ابعاد ۲ سانتی متر از گوشه های برگه مستطیلی که ۲۰ سانتی متر طول و ۱۶ سانتی متر عرض دارد بریده شده است و شکل حاصل به صورت یک جعبه بدون سقف تا زده شده است. حجم جعبه چه قدر خواهد بود؟

- یک مدل باز پاسخ از مساله

در نظر بگیرید یک برگه مستطیل که طول ۲۰ و عرض ۱۶ سانتی متر دارد، و شما می توانید از هر گوشه یک مربع خارج کنید. سپس شما اضلاع را برای ساختن یک جعبه بدون سقف تا بزنید. حجم برخی از جعبه هایی را که می توانید از این کارت جدا کنید، حساب کنید.

طرح مسئله ریاضی

طرح مسئله ریاضی به عنوان تولید مسائل جدید ، و نیز صورت بندی تازه ا ی از یک مسئله موجود تعریف شده است (سیلور ، ۱۹۹۴). "به ندرت از دانش‌آموزان خواسته شده است که برای یک مسئله، فرایندی را ابداع کنند یا مسئله‌های خودشان را بر پایه ارزیابی از یک موقعیت یا داده، طرح کنند". توانایی طرح‌مسئله در آمریکا حداقل از سال ۱۹۹۸، به عنوان یکی از اهداف ریاضیات مدرسه‌ای در نظر گرفته شده و در چین از سال ۲۰۰۲ به اهداف ریاضیات مدرسه‌ای افزوده شده است (یوان و سریرامن،۲۰۱۰). لی‌وی (۲۰۰۷) می‌گوید: "در نظر گرفتن فعالیت‌های طرح‌مسئله در تدریس ریاضی به معلمان کمک می‌کند تا نسبت به ادراکات و دانش ریاضی دانش‌آموزان بصیرت بهتری بدست آورند. همچنین می‌تواند به کاهش وابستگی آنها به معلم و کتاب درسی کمک کند". مزایای استفاده از تکالیف طرح مساله در کلاس های درس ریاضی در تمام پایه ها بررسی شده است و نمی توان نادیده گرفت که چنین تکالیفی می توانند روی ویژگیهای دیگر دانش آموزان تأثیر بگذارند از جمله روی: ۱) استعداد در ریاضیات، شامل درک و فهم وتوانایی حل مسئله، (۲) نگرشها نسبت به ریاضیات، شامل حس کنجکاوی و علاقه، و (۳)احساس مالکیت نسبت به کار خود. به نظر کروتسکی (۱۹۷۶)، دانش آموزانی که در ریاضیات خوب هستند هنگامی که متنی حاوی داده های عددی به آنهاارائه می شود می توانند سوالهای پنهان را ببینند برای مثال، در آزمونی برای شناسایی توانایی ریاضی دانش آموزان ، آزمون از دانش آموزان می خواهد که سوالی طرح کنند که به دنبال متن زیر بیاید: " مسافتی به طول۱۵۵ متر با ۲۵ لوله با طولهای ۵ و ۸ لوله گذاری شده است." سوال ذکر نشده این است که "چه تعداد لوله از هر نوع کارگذاشته شده است؟ " . در سنگاپور، چارچوب برنامه درسی ریاضی بر حل مساله ریاضی تمرکز می کند. در زمره اهداف برنامه درسی، اظهار امیدواری شده است که دانش آموزان قادر به " فرمولبندی" و حل مسائل باشند ". همچنین تکالیف طرح مساله در کتاب های درسی مورد استفاده در مدارس ابتدایی سنگاپور رایج است.

سیلور(۱۹۹۵) طرح مسئله را در سه دسته طبقه بندی می کند:

(الف) قبل ازحل مسئله وقتی که مسائل از یک محرک خاص مانند یک داستان، یک تصویر، نمودار، بازنمایی و غیره، تولید می شوند.

(ب) حین حل مسئله، زمانیکه فرد عمداً اهداف و شرایط مسئله را تغییر می دهد. مثلاً هنگام استفاده از استراتژی " مسئله را ساده ترکن."

(ج) پس از حل یک مسئله، زمانی که زمینه حل مسئله تجربه ای برای موقعیتهای جدید می شود.

لئونگ[۲۶] (۲۰۱۳) در تحقیق خود نحوه اجرای رویکرد آموزشیِ مبتنی بر طرح‌مسئله ریاضی را به معلمان آموزش داد و به مطالعه‌ی نتایج اجرای آن در کلاس‌های ریاضی پرداخت. وی در بخشی از جلساتی که با معلمان داشت به عنوان یک معلم عمل می‌کرد و از معلمان می‌خواست نقش دانش‌آموزان را ایفا کرده، تا یک موقعیت واقعی را شبیه‌سازی و اجرا کنند. لئونگ (۲۰۱۳) جهت کدگذاری مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان، مسائل طرح شده را به پنج دسته تقسیم کرد: ۱- مسئله محسوب نمی‌شود ۲- مسئله محسوب می‌شود ولی مسئله ریاضی نیست ۳-مسئله ریاضی است ولی در دنیای واقعی غیر ممکن است ۴- اطلاعات داده شده کافی نیست ۵- اطلاعات کافی و مسئله کامل است. لئونگ (۲۰۱۳) این پنج دسته را برای موقعیت ارائه شده در شکل ، با مثال‌هایی روشن ساخته است. مثال‌های وی در جدول ۱ بیان شده است.

شکل: موقعیت طرح‌مسئله ارائه شده توسط لئونگ (۲۰۱۳)

وضعیت ارائه شده: یک کیک به ۸ قسمت مساوی بریده شده است. "واه" $\frac{۴}{۸}$ ، "مینگ" $\frac{۲}{۸}$ و "کنگ" نیز $\frac{۲}{۸}$ کیک را خوردند.

کد و نوع پاسخ دانش آموز	مثال
۱- مسئله محسوب نمی‌شود	یک قوطی نوشابه در ۸ فنجان مساوی ریخته شد. "چین" $\frac{۴}{۸}$، "لیپ" $\frac{۲}{۸}$ و "جی" نیز $\frac{۲}{۸}$ لیتر نوشیدند.
۲- مسئله ریاضی نیست	چه کسی کیک خورده؟
۳- غیر ممکن است	یک هندوانه به ۱۰ قسمت بریده شده است. مینگ $\frac{۴}{۸}$ ، "ینگ" $\frac{۲}{۸}$ و واه $\frac{۳}{۸}$ آن را خوردند. چقدر باقی مانده است؟
۴- اطلاعات داده شده کافی نیست	یک کیک به ۸ قسمت مساوی بریده شده است. واه $\frac{۴}{۸}$ و مینگ $\frac{۲}{۸}$ کیک را خوردند. چقدر از کیک را کنگ خورده ؟
۵- اطلاعات کافی و مسئله کامل است	بعد از اینکه دو خواهر من به ترتیب $\frac{۲}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ از کیک را خوردند، چقدر کیک برای برادرم مانده است؟

جدول ۱: کدگذاری مسائل طرح شده بوسیله دانش‌آموزان (لئونگ، ۲۰۱۳)

[۲۶]- Leung

بدفهمی ها

خطاهای محاسباتی و بی‌دقتی، نظام‌مند (قابل پیش‌بینی) نیستند و ما عنوان «اشتباه» را به آن‌ها اختصاص می‌دهیم. اشتباهات معمولاً خطاهایی هستند که در اثر بی دقتی رخ می‌دهند. هنگامی که معلم از دانش‌آموز می‌خواهد پاسخ‌هایش را بیازماید یا مجدداً محاسباتش را نگاه کند، چنانچه دانش‌آموز مفهوم تدریس شده را به خوبی درک کرده باشد، متوجه آن اشتباه می‌شود (باتل، ۱۳۸۹). ولی خطاهای نظام‌مند که تحت عنوان «بدفهمی» شناخته می‌شوند، معمولاً زمانی رخ می‌دهند که در حالت خاص، ایده‌هایی در ذهن دانش‌آموز ایجاد می‌شود و سپس دانش‌آموز در حالت کلی این ایده‌ها را به طور نادرست تعمیم می‌دهد (سویگور، ۲۰۰۸). بدفهمی دانش‌آموزان ممکن است از تجربیات و دانسته‌های پیشین آن‌ها در زندگی روزمره نشأت بگیرد و بطور جدی توسط دانش‌آموزان حفظ شود و لذا نتایج حاصل از یادگیری آن‌ها را به تأخیر اندازد. در ادامه نمونه هایی از بدفهمی های دانش آموزان در پایه های مختلف ارائه می شود.

نمونه ۱: برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ارتباط با مفهوم عدد اعشاری

یک صدم = $۰/۱۰۰$	$۱/۳۵ = \frac{۱}{۳۵}$
$\frac{۲}{۳} = ۲/۳$	$۰/۷ = \frac{۱}{۷}$
$۰/۳ < ۰$	
$۰/۰۲۳ = ۰/۲۳ = ۲۳$	$۰/۵۴۴۴۴۴ = ۰/۵۴$

نمونه ۲: برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ارتباط با مفهوم کسر(تیمز)

کدام یک از کسرهای زیر از $\frac{۱}{۲}$ بزرگ‌تر است؟

الف) $\frac{۳}{۵}$ ب) $\frac{۳}{۶}$ ج) $\frac{۳}{۸}$ د) $\frac{۳}{۱۰}$

نتایج در جدول ارائه شده است.

کد	الف			ب			ج			د		
	2011	2007	2003	2011	2007	2003	2011	2007	2003	2011	2007	2003
ایران	۳۳.۳	۲۹.۷	37.7	۹.۹	۸.۶	۸.۴	۶.۲	۴.۵	۴.۳	۴۷	۵۰.۸	۴۸.۳
مقیاس بین المللی	۴۶.۱	۴۴.۱	۴۷.۸	۱۰.۸	۹.۳	۹.۱	۶.۱	۶.۵	۵.۴	۳۲	۳۳.۶	۳۱.۴

منابع

[۱] باتل، گیل (۱۳۸۹). روش تدریس ریاضی در دوره ابتدایی، (مترجم: شهرناز بخشعلی زاده)، چاپ اول. تهران، انتشارات سمت، نشر اثر اصلی، ۲۰۰۵.

[۲] پورعظیما، زهرا؛ ریحانی، ابراهیم و بخشعلی زاده، شهرناز (۱۳۹۲). بررسی بدفهمی های دانش آموزان سال پنجم ابتدایی در ارتباط با مقایسه اعداد اعشاری. مجموعه مقالات پنجمین همایش ملی آموزش، ۲۶-۲۵ اردیبهشت. تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

[۳] پولیا، جورج (۱۹۶۲). خلاقیت ریاضی. ترجمه پرویز شهریاری (۱۳۷۵)، انتشارات فاطمی، چاپ سوم.

[۴] کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات(۱۳۹۱). مترجم مسعود نوروزیان، انتشارات مدرسه

[۵] رضایی، اعظم؛ ریحانی، ابراهیم و یافتیان، نرگس(۱۳۹۳). بررسی راهبردهای مورد استفاده معلمان ریاضی پایه هفتم استان همدان در حل مسائل ریاضی. ششمین همایش ملی آموزش، ۱۸-۱۷ اردیبهشت. تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

[۶] ریحانی، ابراهیم و اسکندری، مجتبی (۱۳۹۲). بررسی فرایند طرح‌مسئله در آموزش ریاضی

[۷] ریحانی، ابراهیم. بخشعلی زاده، شهرناز و معینی، تریفه (۱۳۸۸). بررسی سیر تکامل دانش مفهومی و دانش رویه ای ریاضی و رابطه ی بین آنها. فصلنامه علمی پژوهشی نوآوری های آموزشی، شماره ۲۹.

[۸] ریحانی ابراهیم؛ احمدی، غلامعلی و کرمی زرندی، زهرا (۱۳۹۰). بررسی تطبیقی آموزش فرایند حل مسئله دربرنامه درسی آموزش ریاضی دوره ی متوسطه ی کشورهای آمریکا، استرالیا، ژاپن، سنگاپور و ایران فصل نامه علمی پژوهشی تعلیم وتربیت. شماره ۱۰۵، ۱۱۵-۱۴۱.

[۹] سلیمیان ریزی، فاطمه و ریحانی، ابراهیم و (۱۳۹۳). افسانه ی پاسخ صحیح. ششمین همایش ملی آموزش،۰ ۱۸-۱۷ اردیبهشت. تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

[۱۰] غیبی، تاییس (۱۳۹۱): بررسی فرایند طرح‌مسئله ریاضی دانش‌آموزان ابتدایی. پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه.

[۱۱] مکینتاش و جرت (۲۰۰۰). آموزش حل مسئله ریاضی: تحقق یک چشم‌انداز، مروری بر ادبیات تحقیق. مترجمان زهرا گیلک و زهرا گویا(۱۳۸۵). رشد آموزش ریاضی(۸۶)،۲۱ -۴.

[۱۲] Becker, Jerry p, Shigeru Shimada, The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics, ۱۹۹۷.

[۱۳] Early Algebraization (۲۰۱۱), Advances in Mathematics Education, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[۱۴] MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING Yearbook ۲۰۰۹, Association of Mathematics Educators (pp ۱۰۲-۱۱۶).

[۱۵] NCTM. (۲۰۰۰). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

[۱۶] Silver, E. A. (۱۹۹۴). On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, ۱۴(۱), ۱۹–۲۸.

[۱۷] Sternberg, R.J. (۲۰۰۵). Cognitive Psychology. Fourth Edition. USA: Wadsworth.

[۱۸] YEAP Ban Har (۲۰۰۹). Mathematical Problem Posing in Singapore Primary Schools, in

[١٩] Yee, Foong Pui .Using Short Open-ended Mathematics Questions to Promote Thinking and Understanding,٢٠٠١.

استفاده از ماشین حساب

پژوهش های بسیاری در آموزش ریاضی وجود دارد که استفاده از ماشین حساب در آموزش ریاضی را تأیید کرده و به جنبه های مثبت آن اشاره دارد. مهم این است که چه زمانی و با چه هدفی از این ابزار می توان استفاده کرد. قبول حضور ماشین حساب در برنامهٔ درسی به معنی حذف آموزش محاسبات نیست. اهمیت حساب کردن کماکان پابرجاست. به همین دلیل در پایهٔ هفتم امتحان دو قسمتی توصیه شده است. در قسمت اول، سؤال های محاسباتی گنجانده می شود. انتظار داریم دانش آموزان بدون استفاده از ماشین حساب بتوانند به این سؤال ها پاسخ دهند. این کار، دانش آموزان را وادار می کند که محاسبات را فرا گیرند. اما وقتی آنها در حال حل مسئله هستند، اهمیت حل کردن مسئله و تشخیص راه حل آن مهم تر از انجام عملیات و محاسبات آن است. در این حالت آنها می توانند از ماشین حساب خود به عنوان یک ابزار استفاده کنند. بنابراین در قسمت دوم امتحان سؤال هایی گنجانده می شود که درآنها محاسبه هدف اصلی نیست، دادن ماشین حساب به دانش آموزان این پیام ضمنی را دارد که حل مسئله در پیدا کردن راه حل مورد نظر است، یعنی از دانش آموز کاری را انتظار داریم که ماشین نمی تواند انجام دهد.

پژوهش ها نشان داده اند که در این مواقع، دانش آموزان اضطراب انجام محاسبه را نداشته و این اطمینان خاطر به آنها کمک می کند که مسئله ها را بهتر حل کنند. هم چنین وجود این ابزار به طراح سؤال، کمک می کند تا مسائل واقعی با عددهای واقعی را طرح کنند و نگران محاسبات طولانی و وقت گیر نباشند، سعی نکنند که تعدادی مسئله را به گونه ای تنظیم کنند که پاسخ نهایی محاسبات طولانی بخواهد.

در پایهٔ هشتم با توجه به این که موضوع محاسباتی زیادی وجود ندارد، در کل آزمون استفاده از ماشین‌حساب مجاز خواهد بود. در دو موضوع جذر و محاسبات عددهای گویا نیز استفاده از ماشین‌حساب‌های معمول چهار عمل اصلی بلامانع است، زیرا اگر دانش آموزی بتواند با کمک ماشین حساب، ٤ عمل اصلی (امکان وارد کردن کسر و عدد مخلوط را ندارد) محاسبهٔ کسری و عدد گویا را انجام دهد، در واقع فرایند محاسبه و ترتیب انجام عملیات را یاد گرفته است. بنابراین ماشین حساب کمک زیادی به او نخواهد کرد. حضور ماشین حساب باعث می شود تا در طرح سؤال ها به مفاهیم بیشتر توجه شود و کمتر به سؤال های صرفاً محاسباتی پرداخته شود.

اما مهم ترین استفاده از ماشین حساب به کاربرد آن در آموزش و پرورش مربوط می شود. یعنی معلمان محترم می توانند از این ابزار کمک بگیرند تا یک مفهوم ریاضی را نیز برای دانش آموزان جا بیندازند. برای مثال آموزش مفاهیم مربوط به جذر و توان به کمک ماشین حساب کار را برای مفهوم سازی ساده تر می کند.

فرض کنید می خواهید دانش آموزان کشف کنند که اگر از عددهای بین صفر و یک، جذر بگیریم حاصل جذر بزرگتر می شود $\left(۰.۰۴ < ۰.۲ \quad , \quad \sqrt{۰.۰۴} = ۰.۲\right)$، برای این کار می توانید چند عدد را به دانش آموزان بدهید و آنها با ماشین حساب جذر بگیرند. توجه آنها را به عددها و جذر عددها جلب کنید تا یک قانون کلی را کشف کنند.

در این سیر علاوه بر استفاده از ماشین حساب می توانیم از نرم افزارهای فراوانی که وجود دارند استفاده کنیم. به همین منظور برای هریک از فصل‌های کتاب‌درسی چندین فعالیت مناسب برای استفاده از ماشین‌حساب یا نرم افزارهای آموزشی پیشنهاد شده است تا مدارسی که از امکانات مربوطه برخوردار هستند از این پیشنهادها برای تدریس و آموزش با کیفیت تر استفاده کنند. یقیناً اگر مؤلفان کتاب درسی از وجود امکانات در تمام کلاس ها مطمئن بودند، این پیشنهادها را در کتاب درسی ارائه می کردند.

ساختار محتوایی کتاب درسی

کتاب درسی ریاضی پایه هشتم، ۹ فصل دارد و هر فصل از ۳ بخش تشکیل شده است: صفحهٔ عنوان، درس ها و مرور فصل. در صفحهٔ عنوان علاوه بر شماره و عنوان فصل تعدادی تصویر و متن آورده شده است. هدف این صفحه ایجاد انگیزه برای ورود به مطلب است. تلاش شده، متن ها و تصاویر کاربردی از مفاهیم آن درس را آشکار سازد و یا اطلاعات جنبی و تکمیلی و در عین حال جذاب به دانش آموزان در خصوص مفاهیم مطرح شده ارائه کند.

هر درس در ٤ صفحه ارائه می شود. هر درس شامل فعالیت، کار در کلاس و تمرین است. هدف از فعالیت‌ها جلب مشارکت دانش‌آموزان در فرایند یاددهی- یادگیری است. کار با انجام فعالیت‌ها شروع می‌شود. پس از این که دانش آموزان به صورت فردی یا گروهی فعالیت را انجام دادند، دبیر محترم می تواند به کمک پاسخ های دانش آموزان فعالیت را جمع بندی کند. کار در کلاس به منظور ارائه باز خورد به معلم طراحی شده است. دانش آموزان با انجام سؤال های کار در کلاس میزان درک و یادگیری خود را به نمایش می گذارند و معلم می تواند کاستی ها و کمبودهای تدریس را با حل تمرین های آن و ارائه توضیحات تکمیلی کامل کند. تمرین های هر درس برای منزل و به جهت تثبیت یادگیری طراحی شده اند.

در پایان هر فصل نیز یک صفحه به مرور مطالب اختصاص داده شده است. هدف این صفحه ایجاد زمینه برای مرور مطالب درس ها و تهیه یک خلاصه درس توسط دانش آموزان است. مهم ترین نکته این است که دانش آموزان با قلم وانشای خود بتوانند آنچه آموخته اند را بنویسند و توضیح دهند. این کار به سازمان دهی

ذهنی آنها کمک می کند تا مطلب را به صورتی منظم به حافظهٔ خود بسپارند تا در مواقع لزوم بتوانند آن را بازیابی کنند. از گفتن جملات کلیشه ای و دیکته گفتن مطالب به دانش آموزان پرهیز کنید. تصحیح نوشته های دانش آموزان به معلمان کمک می کند تا بدفهمی های آنها را متوجه شوند. توصیه می شود از دانش آموزان بخواهید تا نوشته های خود را برای هم کلاسی های خود بخوانند. این کار کمک می کند تا اشکال های یکدیگر را متوجه شوند و به هم تذکر دهند. در این صفحه کاربردی از فصل نیز مطرح شده است. در کنار آن چند نمونه سؤال ترکیبی که مفاهیم آن فصل را به هم مرتبط می سازد نیز ارائه شده است.

در مجموع کتاب ریاضی پایهٔ هشتم، ۳۱ درس چهار صفحه ای دارد. با توجه به اینکه یک سال تحصیلی حداقل ۳۱ هفته است. می توان به طور تقریبی فرض کرد که هر درس در یک هفته آموزش داده شود. به عبارت دیگر هر صفحه برای یک ساعت آموزشی درنظر گرفته شده است. بر این اساس در صفحه بعد، بودجه بندی پیشنهادی ارائه شده است. همان طور که از عنوان آن بر می آید، این زمان بندی پیشنهادی است و معلمان محترم ریاضی می توانند متناسب با توانایی دانش آموزان کلاس خود و برخورداری از امکانات مختلف این بودجه بندی را برای خود متناسب سازی کنند. در این زمان بندی، ایام امتحانات نیم سال اول در نظر گرفته شده است.

توصیه می شود در ایام امتحانات نیم سال اول، مدرسه و فرایند آموزش تعطیل نشود. هم چنین اتمام کتاب درسی در پایان اسفند به هیچ وجه توصیه نمی شود. فرایند آموزش را متوقف نکنید و تا هفته های پایانی سال ادامه دهید.

زمان بندی پیشنهادی - ریاضی پایهٔ هشتم

ماه	هفته	محتوای آموزشی
مهر	اول	یادآوری عددهای صحیح
	دوم	معرفی عددهای گویا
	سوم	جمع و تفریق عددهای گویا
	چهارم	ضرب و تقسیم عددهای گویا - یادآوری عددهای اول
آبان	اول	تعیین عددهای اول
	دوم	دسته بندی چند ضلعی ها
	سوم	توازی و تعامد
	چهارم	دسته بندی چهار ضلعی ها
آذر	اول	زاویهٔ داخلی - زاویهٔ خارجی
	دوم	ساده کردن عبارت های جبری
	سوم	پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری
	چهارم	تبدیل عبارت جبری ضرب
دی	اول	معادله
	دوم	جمع بردارها
	سوم	ایام امتحانات نوبت اول
	چهارم	
بهمن	اول	ضرب عدد در بردار - بردارهای واحد مختصات
	دوم	رابطهٔ فیثاغورس - شکل های هم نهشت
	سوم	مثلث های هم نهشت
	چهارم	هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه
اسفند	اول	یادآوری توان - تقسیم عددهای توان دار
	دوم	جذر تقریبی
	سوم	نمایش عددهای رادیکالی روی محور اعداد
	چهارم	دسته بندی داده ها - میانگین داده ها
فروردین	سوم	احتمال یا اندازه گیری شانس
	چهارم	بررسی حالت های ممکن
اردیبهشت	اول	خط و دایره
	دوم	زاویهٔ مرکزی
	سوم	زاویهٔ محاطی
	چهارم	

بخش ۲

بررسی صفحه به صفحه

روش‌های تدریس مفاهیم و محتوای

کتاب درسی ریاضی

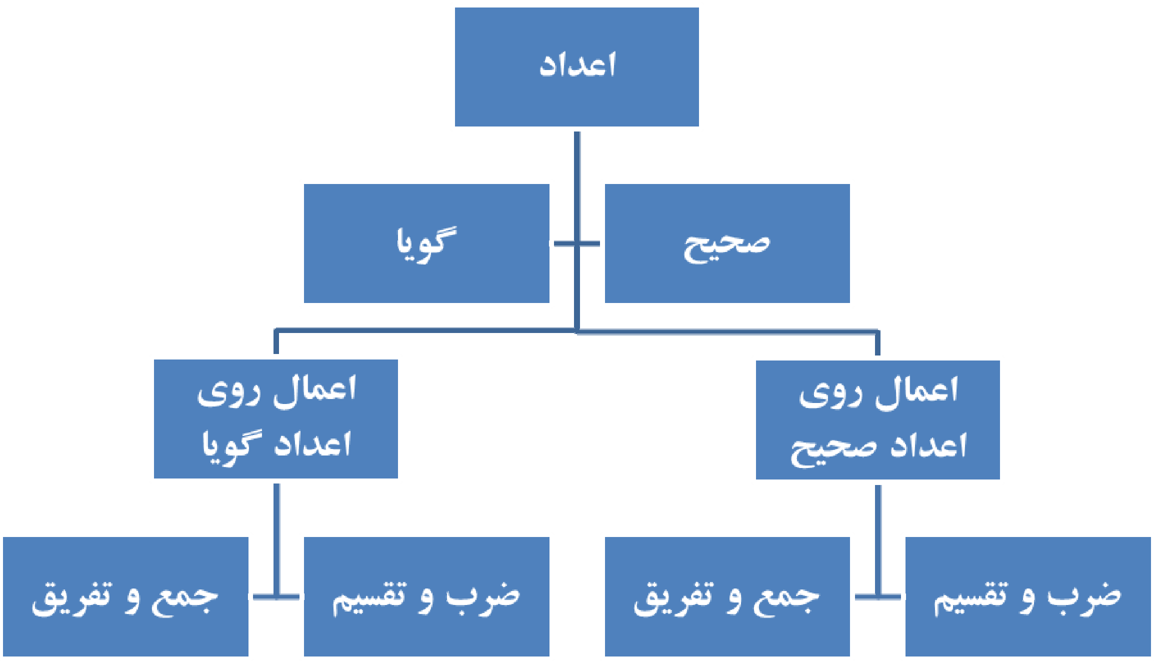
پایهٔ هشتم

فصل ۱

عددهای صحیح و گویا

نگاه کلی به فصل

در پایۀ ششم عددهای صحیح معرفی شدند. در پایۀ هفتم آموزش عددهای صحیح و محاسبه های مربوط به آن کامل شد. در سال هشتم ضمن یادآوری مفاهیم عددهای صحیح، مهارت در محاسبه مورد نظر است تا ضمن آن زمینه برای معرفی عددهای گویا فراهم شود. ۳ درس این فصل به معرفی و محاسبه های جمع و تفریق، ضرب و تقسیم عددهای گویا می پردازد. شیوۀ آموزش عددهای گویا در همان راستای روش های مطرح شده در مورد عددهای صحیح است. با این فصل پرونده حساب در دوره آموزشی عمومی بسته خواهد شد. در سال آینده دانش آموزان تمام توانایی و دانش خود را به کار می برند تا محاسبات را با مهارت انجام دهند.



تصویر عنوانی

یکی از کاربردهای عددهای علامت دار بیان ارتفاع و سطوح مختلف است. در نقشۀ کشور ایران ارتفاع مکان های مختلف با رنگ های متفاوت مشخص شده است. به طور معمول ارتفاع سطح دریاهای آزاد را صفر

فرض می کنند و ارتفاع نقاط بالاتر از سطح دریا را با علامت مثبت و ارتفاع نقاط پایین تر را با علامت منفی نشان می دهند.

دانستنی هایی برای معلم

اعداد گویا

انسان امروزی در دنیای اعداد زندگی می کند، برای خرید و فروش، محاسبهٔ کارمزد، مالیات، درجهٔ حرارت، حقوق، نمره. در هر لحظه نیازمند به عدد هستیم، به همین دلیل هر انسانی باید دست کم از مقدمه های دانش حساب، آگاهی داشته باشد.

مفهوم کسر، پس از آن که تصور کم و بیش مشخصی دربارهٔ اعداد طبیعی پیدا شد، به وجود آمد. مفهوم «نصف» یا «نیم» خیلی زودتر از مفهوم های «یک سوم» و «یک چهارم» پیدا شد. به تقریب در همهٔ زبان ها، رابطه ای بین واژه های «نصف» و «دو» نیست و این به معنای آن است که در ابتدا «نصف» برای بخشی از واحد به کار می رفت نه برای $\frac{۱}{۲}$ آن. ضرب المثل «نصف عمر شدم» یا «نیم روز» یا «نیم پز» که در زبان فارسی به کار می رود، نشانه ای بر این مطلب است. تصور دربارهٔ اعداد طبیعی ضمن شمارش دارایی ها و تصور دربارهٔ کسرها، ضمن اندازه گیری و شکستن واحد اندازه گیری (محاسبهٔ طول و وزن)، تقسیم ارث و محاسبهٔ زکات به وجود آمد.

در هزارهٔ دوم پیش از میلاد، بشر توانست از کسر، همچون بخشی از واحد استفاده کند. در بابل کهن، حتی نمادهای خاصی برای برخی کسرها وجود داشت. برای مثال، این طور می نوشتند:

آنها کسرهای مرکب را هم با نمادهای معینی نشان می دادند، از جمله کسر مرکب $۲\frac{۲۱}{۶۰}$ را این طور نشان می دادند:

شکل امروزی نوشتن کسر، متعلق به هندی ها است، تنها پاره خط بین صورت و مخرج (خط کسری) را نمی نوشتند، از جمله $\frac{۲}{۵}$ را به صورت $\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}$ نمایش می دادند.

نوشتن کسرهای متعارفی و عمل با آنها را برای نخستین بار محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی در کتاب «حساب» خود به کار برد که بعد از او، همهٔ ریاضیدانان ایرانی از او پیروی کردند.

لئوناردو فیبوناتچی، اهل پیزا که در سدهٔ سیزدهم میلادی می زیست و به خاطر سفرهای خود در شرق، با دانش کشورهای خاور زمین آشنا شده بود، کسرهای متعارفی و روش عمل با آنها را برای نخستین بار، در

اروپای غربی متداول کرد. مصری ها برای $\frac{١}{٢}$ و $\frac{٢}{٣}$ نماد خاصی داشتند ولی بقیهٔ کسرها را به حاصل جمع کسرهایی تبدیل می کردند که همه آنها به صورت معکوس اعداد طبیعی بودند، برای مثال:

$$\frac{٢}{٥}=\frac{١}{٣}+\frac{١}{١٥};$$
$$\frac{٢}{٧}=\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢٨};$$
$$\frac{٢}{٩}=\frac{١}{٦}+\frac{١}{٢٨};$$
$$\frac{٢}{١١}=\frac{١}{٦}+\frac{١}{٦٦};$$
$$\frac{٢}{١٣}=\frac{١}{٨}+\frac{١}{٥٢}+\frac{١}{١٠٤}$$

سرچشمهٔ عددهای منفی

در روزگار کنونی وقتی از اعداد منفی صحبت می کنیم، برای مثال ۳- یا ۵- همه به راحتی مفهوم آنها را درک می کنند و مکان این اعداد را روی محور می دانند. اما در روزگاران گذشته مردم و حتی ریاضیدانان عددهای منفی را نمی شناختند، زیرا آنها فقط تعداد دارایی های خود را با اعداد طبیعی نشان می دانند. برای مثال گلّه ای با ٤٠ رأس گوسفند و ٢٠ رأس بز را به چراگاه می بردند.

عددهای منفی تنها وقتی مورد قبول عام قرار گرفتند که سرچشمهٔ واقعی آنها پدیدار شد، ولی دانشمندان یک باره به این سرچشمه پی نبردند. برای رسیدن به این مرحله، دشواری ها و موانع بسیاری وجود داشت.

یکی از روش های تفسیر مقدارهای مثبت و منفی را هندی ها یافتند که بسیار هم طبیعی بود. آنها سرچشمهٔ مقدارهای مثبت و منفی را در دارایی و قرض یافتند. برای نمونه «براهما گوپتا» (۵۹۸ – ٦٦٠ میلادی) یکی از بزرگترین ریاضیدانان و اخترشناسان، در کتاب «بازبینی دستگاه های براهما» در سال ٦٢٨ میلادی نوشته است:

«مجموع دو دارایی، یک دارایی و مجموع دو قرض، خود یک قرض محسوب می شود. مجموع دارایی و قرض، تفاضل آنها و اگر برابر باشند، صفر است. مجموع صفر و دارایی، یک دارایی و مجموع صفر و قرض، قرض است. مجموع دو صفر، برابر با صفر است.»

سپس می گوید:

«وقتی کوچکتر را از بزرگتر کم کنیم، از دارایی، دارایی به دست می آید و از قرض، قرض حاصل می شود ولی اگر بزرگ را از کوچک کم کنیم، از دارایی به قرض و از قرض به دارایی می رسیم. وقتی دارایی را از صفر کم می کنیم، قرض و وقتی قرض را از صفر کم کنیم، دارایی به دست می آید.»

با تفسیر براهما گوپتا وقتی شخصی ۵ تومان دارایی و ۷ تومان قرضی داشت، یعنی:

۵−۷=−۲

در این صورت آن شخص ۲ تومان قرض داشت. در این حالت مفهوم ۲- را مردم به عنوان ۲ تومان قرض می پذیرفتند.

با گذشت زمان و پذیرفتن اعداد منفی، بعدها اعداد گویای منفی هم به عنوان قرینهٔ اعداد گویای مثبت مورد پذیرش مردم قرار گرفتند.

مسیرهایی برای توسعه

طرح مسئله هایی که حل آنها نیاز به الگویابی در اعداد و دسته بندی عددها دارد، می تواند مسیر مناسبی برای توسعه مفاهیم این فصل باشد. مسئله زیر با همین هدف طرح شده است:

۱- مورچه کوچولو روی محور اعداد صحیح زندگی می کند. او اکنون روی عدد صفر است. در ثانیه اول ۱ واحد به راست می رود. در ثانیه دوم ۲ واحد به چپ، در ثانیه سوم ۳ واحد به راست، در ثانیه چهارم ٤ واحد به چپ و به همین ترتیب در هر ثانیه جهت حرکتش را تغییر می دهد و یک واحد به حرکتش اضافه می کند.

الف) مورچه کوچولو بعد از ثانیه دهم روی چه عددی قرار می گیرد؟

ب) بعد از ثانیه صدم؟ مسیر فکریتان را توضیح دهید.

اعداد صحیح شمارا هستند! یعنی هر عدد صحیح را می توان با یک عدد طبیعی متناظر کرد و مثلاً به ترتیب زیر شمرد:

یکی از موضوعات مهم در مبحث اعداد هم درک این مطلب است که با وجود این که بی شمار عدد گویا بین هر دو عدد گویا وجود دارد، اعداد گویا نیز شمارا هستند! در جدول زیر روشی برای مرتب کردن اعداد گویا مثبت را با رسم مسیر رنگی نشان داده ایم.

۲- عددهای گویا را به ترتیبی که مشاهده می کنید در جدول روبه رو به شکلی منظم نوشته ایم. عددهای ۱۰ ردیف بالای ردیف صفر و ۱۰ ردیف پایین ردیف صفر را تا ستون دهم کامل می کنیم.

الف) حاصل جمع عددهای ردیفی را که با ۱- شروع می شود، با حاصل جمع عددهای ردیفی که با ۱ شروع می شود، مقایسه کنید.

ب) حاصل جمع عددهای ردیفی را که با ۷ شروع می شود، با حاصل جمع عددهای ردیفی که با ۱ شروع می شود، مقایسه کنید.

ج) حاصل جمع عددهای ستون دوم را به دست آورید.

د) حاصل جمع عددهای ستون هفتم را به دست آورید.

ه) عددهای ۱۰۰ ردیف بالای ردیف صفر و ۱۰۰ ردیف پایین ردیف صفر را تا ستون صدم کامل می کنیم. چه الگوهایی در جمع عددهای سطرها و ستون های مختلف دیده می شود؟ توضیح دهید.

استفاده از ابزارهای فن آورانه:

استفاده از ماشین حساب در انجام محاسبات اعداد گویا با توجه به محدودیت هایی که در انجام عملیات دارد، می تواند مهارت دانش آموزان در به کارگیری حقایق اعداد و خاصیت های اعمال را گسترش دهد.

۱- حاصل عبارت های زیر را به کمک ماشین حساب به دست آورید (دقت کنید که با به کارگیری خاصیت هایی مانند جابه جایی در جمع ممکن است بتوانید عملیات را ساده تر کنید.)

$$-\frac{۷}{۵}+\frac{۶}{۸}=$$

$$\frac{-۱۷}{۲۵}\div\frac{-۲۰}{۱۱}=$$

۲- می خواهیم حاصل عبارت زیر را با استفاده از ماشین حسابی که دکمه های پرانتز هم دارد و حاصل عملیات را پس از زدن دکمه تساوی نشان می دهد، تنها با یک بار زدن دکمه تساوی پیدا کنیم. دکمه ها را به ترتیب مشخص کنید.

$$-۲-\frac{\frac{۳}{۵}-\frac{۲۱}{۴۰}}{-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}}=$$

معرفی منابع برای معلمان

- *خلاقیت ریاضی*؛ تألیف جرج پولیا؛ ترجمه پرویز شهریاری؛ انتشارات فاطمی؛ فصل ۳
- *ریاضیات برای معلمان*؛ تألیف گروهی از نویسندگان به سرپرستی جی. ال. مارتین؛ ترجمه شهرناز بخشعلی زاده؛ انتشارات مدرسه؛ فصل های ۸ و ۱۲
- *اثبات بدون کلام*؛ تألیف راجر. ب. نلسن؛ ترجمه سپیده چمن آرا؛انتشارات فاطمی؛ فصل ٤

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$-۳+۶-۹+۱۲-۱۵+۱۸- \ldots -۹۹+۱۰۲ =$$

۲- علامت های + ، − ، × یا ÷ را در مربع ها قرار دهید تا حاصل عبارت بیشترین مقدار ممکن شود.

$$\square\square - ۴\square\square \frac{۱}{۲} \square\square - ۳\square\square - ۷$$

۳- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$-۸\frac{۲}{۳} + ۱\frac{۱}{۱۳} =$$

$$-۴\frac{۱}{۲} + ۱\frac{۱}{۳} =$$

$$۱ - \frac{۱ - ۱\frac{۱}{۲}}{-۱ + ۲\frac{۱}{۳}} =$$

$$-۲ \div \left(-۱\frac{۱}{۳}\right) =$$

۴- با رعایت ترتیب انجام عملیات حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$-\frac{۴}{۷} \div \frac{۸}{۲۱} - ۱\frac{۱}{۳} =$$

$$۱ - ۱\frac{۱}{۲} \times \left(\frac{-۴}{۹}\right) =$$

$$-۲۰ + ۲۰ \div (-۲) - ۱۵ \div ۳ =$$

$$۱ - \frac{۲}{۳} \times \frac{-۱}{۴} - \frac{۲}{۳} \div ۱\frac{۱}{۴} =$$

۵- حاصل عبارت های زیر چند است؟ چرا؟

$$(-۹)\times(-۸)\times(-۷)\times \ldots \times۷\times۸\times۹=$$

۶- هریک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$-\left(\frac{-۱۴}{-۲۱}\right) =$$

$$-\left(-\frac{۳}{۶}\right) =$$

$$\frac{-۳۵ - (-۴)}{-۱۶ - (-۵)} =$$

$$\frac{-۱۴ \times (-۲۰)}{۲۱ \times (-۳۰)} =$$

یادآوری عددهای صحیح

هدف:

۱- مرور و یادآوری آموخته های سال قبل در مورد عددهای صحیح

۲- آشنایی با روش های متنوع در محاسبات عددهای صحیح و به کار بردن راه حل های ابتکاری

۳- رعایت ترتیب انجام عملیات در محاسبهٔ عددهای صحیح

٤- بررسی حالت های مختلف جمع عددهای صحیح برای به دست آوردن بیشترین یا کمترین مقدار عبارت

ابزار مورد نیاز:

۱- محور عددهای صحیح با تقسیم بندی های مختلف

۲- ماشین حساب

روش تدریس:

هدف کلی این درس آشنایی دانش آموزان با روش های متنوع در محاسبهٔ یک عبارت عددی است و ضمن آن مطالب تدریس شده در سال گذشته مرور می شود تا آمادگی لازم جهت تدریس مفاهیم مربوط به عددهای گویا فراهم شود. برای یادآوری مفاهیم مربوط به عددهای صحیح می توانید کار را با برگزاری مسابقه های کلاسی شروع کنید. با عبارت های جمع و تفریق دو عدد، قرینه کردن و نمایش عدد روی محور شروع کنید. اگر جواب درست دادند، یک مثبت و در صورت نادرست بودن جواب ها یک منفی بدهید. به این ترتیب به صورت عملی کاربرد عددهای صحیح را نشان دهید و با تمرین های ساده مطالب را مرور کنید.

هدف فعالیت اول این درس، یادآوری نمایش عدد روی محور، متناظر کردن یک عدد صحیح با حرکت روی محور، قرینهٔ عددهای صحیح، جمع و تفریق و ترتیب انجام عملیات است. در ضمن آن، دانش آموزان با تنوع روش های محاسبهٔ یک عبارت جمع و تفریق مواجه می شوند. سؤال ٥ اهمیت زیادی دارد. از دانش آموزان بخواهید در مورد ویژگی های هر روش توضیح دهند و در کلاس با یکدیگر بحث کنند. برای انتخاب یکی از روش ها دلیل بیاورند. هم چنین به آنها یادآور شوید که در محاسبات خود تلاش کنند با به کار بردن روش های ابتکاری به دنبال کم کردن زمان و کوتاه کردن محاسبه باشند. در این قسمت دانش آموزان می توانند از ماشین حساب برای بررسی درستی محاسبهٔ خود استفاده کنند.

کار در کلاس این قسمت نیز به تمرین محاسبهٔ عبارت های عددی پرداخته است. در سؤال دوم بدفهمی های رایج دانش آموزان مطرح و در سؤال چهارم نیز روش ابتکاری و خلاقانه گوس برای محاسبه جمع عددهای ۱ تا ۱۰۰۰ بیان شده است. هدف از طرح این موضوع توجه دادن به معلم های محترم می باشد که به

جای گفتن فرمول ها و رابطه های خاص دانش آموزان را تشویق کنند تا با استفاده از راهبردهای حل مسئله مثل الگویابی و حل مسئله ساده تر، تلاش کنند تا راه حل مسئله را پیدا کنند. انباشت فرمول های محاسباتی در ذهن دانش آموزان ثمری ندارد و توصیه نمی شود.

هدف فعالیت دوم این درس نیز پرداختن به موضوع تعیین علامت یک عبارت و بررسی تأثیر علامت های مثبت و منفی در حاصل عبارت است. دانش آموزان با بررسی ٤ حالت مختلف باید به یک قاعدهٔ کلی برسند. اگر هدف این است که حاصل عبارت بیشترین مقدار ممکن شود علامت ها به گونه ای تعیین می شوند که به جمع عددهای مثبت نزدیک شویم و اگر هدف کمتر شدن مقدار یک عبارت است باید جمع عددهای منفی را ایجاد کنیم.

حل بعضی از تمرین ها

در قسمت تمرین های این درس که تکلیف منزل دانش آموزان می باشد، چند سؤال اهمیت بیشتری دارد. در سؤال دوم هدف این است که دانش آموزان متوجه شوند که هر عدد طبیعی یک عدد صحیح است ولی برعکس آن درست نیست.

همچنین برای بررسی عددها ابتدا باید مقدار عدد را در ساده ترین صورت بنویسند. برای مثال $\sqrt{٤}$ همان عدد ۲ است، پس هم می تواند عدد طبیعی باشد و هم صحیح.

سؤال ۵ نیز یک تمرین مناسب برای محاسبهٔ فرضی جمع و تفریق سه عدد صحیح است. مراحل پیدا کردن جواب این سؤال با عددهای ۱ تا ۵ در جدول زیر مشخص شده است.

−۸	۲	۱
۵	−۲	−٦
٤	۳	٤

توصیه های آموزشی

۱- تا وقتی دانش آموزان محاسبه های سادهٔ عددهای صحیح را یاد نگرفته اند، شروع درس عددهای گویا، بی فایده است، لذا برای این درس اهمیت خاصی قائل شوید.

۲- از ارائه فرمول ها و رابطه های خاص برای محاسبه عبارت هایی مثل جمع عددهای۱ تا n، جمع عددهای فرد یا زوج ۱ تا n و موارد مشابه جداً خودداری کنید. این کار از نظر آموزشی توصیه نمی شود. به جای آن به توسعه راهبردهای حل مسئله بپردازید و دانش آموزان را تشویق کنید که خودشان به آن فرمول ها دست یابند.

۳- با توجه به این که در این درس هدف آموزش روش های محاسباتی است، از ماشین حساب فقط برای حل مسئله یا بررسی درستی انجام محاسبات استفاده کنید.

بدفهمی‌های رایج دانش آموزان

۱- یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان، رعایت نکردن ترتیب انجام عملیات است. برای مثال در محاسبهٔ عبارت $۳ + ۵ \times ۲$، عمل ضرب مقدم است و ابتدا باید انجام شود، اما دانش آموزان به طور معمول از سمت چپ شروع می کنند و ابتدا عمل جمع را انجام می دهند.

۲- همانطور که در تمرین دوم کار در کلاس ملاحظه کردید، یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان عدم توجه به علامت پشت عدد است. در این تمرین دانش آموزان بدون توجه به علامت منفی پشت عدد ۷ ابتدا ۲-۷ را انجام می دهند.

۱۰+۳−۷−۲

۱۰+۳−۵

۳- در تشخیص نوع عددها قبل از ساده کردن نمی توان اظها نظر کرد. برای مثال $\sqrt{۴}$ به ظاهر یک عدد طبیعی نیست اما با توجه به اینکه $\sqrt{۴} = ۲$ است، باید بگوییم این عدد یک عدد طبیعی است.

معرفی عددهای گویا

هدف:

۱- متناظر کردن عددهای گویا روی محور

۲- پیدا کردن قرینهٔ عددهای گویا

۳- تبدیل کسر به عدد مخلوط (در خصوص عددهای گویا) و برعکس

٤- نوشتن کسرها و عددهای گویا مساوی هم

۵- پیدا کردن جزء مجهول در یک تساوی عددهای گویا

٦- ساده کردن یک عدد گویا

۷- مقایسهٔ عددهای گویا

۸- درک نامتناهی بودن تعداد عددهای گویا بین دو عدد گویا

۹- تعیین علامت یک عدد یا عبارت گویا

ابزار مورد نیاز:

۱- انواع محورهای عددهای گویا با تقسیم بندی های متفاوت

۲- دستگاه های عقربه ای که محل عقربه نشان دهندهٔ یک عدد گویا باشد.

روش تدریس

هدف کلی این درس آشنایی دانش آموزان با عددهای گویا است. با توجه به این که مفاهیم مربوط به کسر در سال های پایانی ابتدایی آموزش داده شده و هم چنین عددهای صحیح در سال گذشته تدریس شده است، در واقع معرفی عددهای گویا تعمیم و ترکیب دو درس ذکر شده است. به همین دلیل در ٤ صفحهٔ این درس، تعداد هدف های زیادی دنبال می شود. انتظار داریم دانش آموزانی که عددهای صحیح و کسر متعارفی را یاد گرفته است، بتواند فعالیت ها و کار در کلاس های این درس را پاسخ دهند.

هدف از فعالیت اول این درس متناظر کردن نقاط روی محور با عددهای گویا، درک مفهوم قرینهٔ عددهای گویا و تساوی عددهای گویا است. شروع کار با محور عددهای صحیح و کسرهای مثبت است. پس از آن که قرینهٔ عدهای گویا روی محور پیدا شد، محور عددهای گویا و پیدا کردن نقاط روی محور، دنبال می شود. معرفی قرینهٔ یک عدد دقیقاً به همان صورتی است که قرینه عددهای صحیح در سال گذشته مطرح شده بود. در سؤال های ۵ و ٦ هم تساوی کسرهای گویا و هم پیدا کردن جزء مجهول مشابه کاری که در کلاس ششم با عددهای کسری انجام شده است، مرور می شود.

در کار درکلاس این قسمت نیز ساده کردن کسرها، خواندن عددهای گویا روی دستگاه های عقربه ای و مقایسهٔ عددهای گویا مطرح شده است. سؤال پنجم این قسمت اهمیت زیادی دارد. در این سؤال عبارت های جبری متناظر با عبارت های کلامی نوشته شده است تا ضمن آن دانش آموزان یاد بگیرند که نامساوی مثل $۱ < x < ۲$ به چه معناست، از این موضوع در درس های بعدی مثل آمار و میانگین استفاده خواهد شد تا دانش آموزان بتوانند حدود دسته ها را به این صورت نشان دهند.

هدف فعالیت بعدی این درس، درک این موضوع است که بین دو عدد، بی شمار عدد وجود دارد. اگر چه کار با دو عدد طبیعی شروع شده است، اما در انتهای فعالیت این موضوع به عددهای صحیح و عددهای گویا تعمیم داده می شود و در کار در کلاس آن یک مورد تمرین می شود.

در فعالیت پایانی این درس نیز یک موضوع بسیار مهم مطرح شده است. اول آن که دانش آموزان یاد بگیرند که یکی از زیر ساخت های مفهومی کسر، تقسیم است. به عبارت دیگر $۳ \div ۲$ را می توان به صورت $\frac{۲}{۳}$ نشان داد و برعکس. این موضوع نیز در دورهٔ دبستان آموزش داده شده و در اینجا به عددهای گویا تعمیم داده می شود. در ادامه به کمک همین موضوع ارتباط کسر و تقسیم را یاد می گیرندکه یک عدد گویا را تعیین علامت کنند. در واقع علامت کسری مثل $\frac{-۳}{-٤}$ به تقسیم دو عدد صحیح تبدیل شده و با استفاده از تقسیم عددهای صحیح که در سال گذشته یاد گرفته اند، علامت این کسر تعیین می شود.

هم چنین تساوی $\frac{۲}{-۳} = \frac{-۲}{۳} = -\frac{۲}{۳}$ نیز با تبدیل خط کسری به تقسیم و تعیین علامت هر کدام مشخص می شود.

حل بعضی از تمرین ها

سؤال مهم تمرین از این جهت اهمیت دارد که هم دانش آموزان عددها را تا حد امکان ساده کنند و بعد اظهار نظر کنند و هم این که یاد بگیرند همه عددهای طبیعی و صحیح، جزء عددهای گویا هستند. برای مثال $-(-(+٤))$ برابر با ٤ است و هم عدد طبیعی، هم عدد صحیح و هم عدد گویا است.

در سؤال دوم نیز هدف کمک کردن به درک بهتر نامعادله های جبری است. هم چنین یاد می گیرند که در کسرهایی با صورت مساوی، کسری بزرگتر است که مخرج کوچک تر داشته باشد اما وقتی صورت عددهای منفی هستند، نتیجه متفاوت می شود.

توصیه های آموزشی

۱– مهم ترین توصیه در این درس این است که معلمان محترم به موضوع تعمیم دادن مفاهیم عددهای صحیح و کسر متعارفی اشاره و توجه کنند. برای شروع هر قسمت به یکی از دو مورد فوق برگردند و دانش آموزان را از چگونگی تعمیم دادن آگاه کنند. در صورتی که دانش آموزان در هر قسمت مربوط به عدد گویا با اشکال

مواجه شدند، دوباره به مبحث مربوطه در درس های کسر و عددهای صحیح برگردید و کار را دوباره از آنجا شروع کنید.

۲- با توجه به تنوع موضوعات مطرح شده در این ٤ صفحه و تعداد کم تمرین های کتاب درسی، در تدریس این درس صبور باشید و تمرین های مشابهی در کلاس درس حل کنید تا دانش آموزان به مهارت لازم دست یابند.

۳- یکی از مفیدترین کارها در این درس انجام تمرین های فرضی است. برای مثال شما عددهای گویا را بگویید و دانش آموزان قرینه کنند، یا عدد مخلوط گویا بگویید و آنها به کسر گویا تبدیل کنند.

مقایسهٔ دو عدد گویا، تعیین علامت یک عدد گویا و سایر موارد مربوط به این درس را نیز به صورت ذهنی تمرین کنید.

٤- برای بیان کاربردهای عددهای گویا می توانید از فرمول های فیزیکی مثل $\frac{۱}{f}=\frac{۱}{q}+\frac{۱}{p}$ که برای مبحث نور و عدسی ها است استفاده کنید.

اشتباهات رایج دانش آموزان

۱- یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان این است که علامت منفی پشت کسر را هم به صورت و هم به مخرج می دهند، برای مثال در عدد $-\frac{۲}{۳}$ علامت منفی را هم به ۲ و هم به ۳ می دهند. به مثال زیر و نحوهٔ حل دانش آموز توجه کنید.

$$-\frac{۵}{۳}=\frac{x}{۲}\rightarrow ۲\times(-۵)=x\times(-۳)\rightarrow -۱۰=-۳x$$

۲- در تبدیل عدد مخلوط به کسر در دورهٔ ابتدایی یاد گرفته اند که به صورت زیر عمل کنند.

$$۱\frac{۲}{۳}=\frac{۱\times۳+۲}{۳}$$

اگر این موضوع را به عدد مخلوط منفی تعمیم دهند، دچار اشتباه می شوند: $-۱\frac{۲}{۳}\neq\frac{-۱\times۳+۲}{۳}$

۳- یکی دیگر از اشتباهات دانش آموزان نمایش عدد مثل $-۲\frac{۱}{۳}$ روی عدد است. آنها ابتدا تا -۲ به پیش می روند و به جای آنکه $\frac{۱}{۳}$ را به سمت چپ عدد حرکت کنند، به سمت راست می روند.

ریشهٔ این اشتباه عدم درک درست از $-۲\frac{۱}{۳}$ است. آنها تساوی زیر را درک نکرده اند.

$$-۲\frac{۱}{۳} = -۲ - \frac{۱}{۳}$$

این اشتباه در محاسبات جمع و تفریق عددهای مخلوط هم اتفاق می افتد.

جمع و تفریق عددهای گویا

هدف:

۱- پیدا کردن حاصل جمع دو عدد گویا با کمک حرکت روی محور

۲- تبدیل تفریق دو عدد گویا به هم

۳- محاسبهٔ تقریبی جمع و تفریق دو عدد گویا

٤- کسب مهارت در انجام محاسبه های جمع و تفریق دو عدد گویا.

ابزار مورد نیاز:

۱- محور عددهای گویا با تقسیم بندی های متفاوت.

روش تدریس:

هدف کلی این درس آموزش و کسب مهارت در انجام محاسبه های جمع و تفریق دو عدد گویا است. برای رسیدن به این مهارت ابتدا جمع روی محور انجام می شود، سپس نحوهٔ تبدیل تفریق به جمع، مشابه آنچه در عددهای صحیح مطرح بود، بیان شده و در انتها در خصوص نحوهٔ نوشتن محاسبه و انجام تکنیک و کسب مهارت، کار می شود.

فعالیت اول این درس با یادآوری حرکت روی محور و نوشتن جمع متناظر برای دو حرکت پشت سرهم و پیدا کردن حاصل جمع دو عدد صحیح آغاز می شود. سپس حرکت عددی محور متناظر با عددهای گویا تمرین شده، سپس جمع دو عدد گویا به کمک محور آموزش داده می شود.

با تبدیل تفریق دو عدد گویا (کسری – اعشاری) محاسبهٔ تفریق به جمع تبدیل می شود. هم چنین محاسبهٔ تقریبی دو عدد گویا و تبدیل آنها به عددهای صحیح تمرین می شود. در این سؤال درک این نکته که عدد گویایی مثل $-۳\frac{۷}{۸}$ به -٤ نزدیک تر است تا به -۳ اهمیت دارد. کار در کلاس این قسمت جمع بندی فعالیت بالا است یعنی پیدا کردن حاصل جمع و تفریق دو عدد گویا به کمک حرکت روی محور.

در فعالیت دوم این درس با استفاده از حرکت روی محور برای جمع، نحوهٔ محاسبه و نوشتن مراحل آن جمع بندی می شود. در جمع $(\frac{-۵}{۴}) + \frac{۳}{۴}$ در واقع مخرج ۴ کنار گذاشته می شود و جمع دو عدد گویا به جمع دو عدد صحیح تبدیل می شود. $\frac{۳}{۴}$ یعنی ۳ تا $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{-۵}{۴}$ یعنی ۵- تا $\frac{۱}{۴}$، پس حاصل جمع بالا را می توان به صورت $(-۵) + ۳$ تا $\frac{۱}{۴}$ تبدیل کرد. به همین دلیل می توان تساوی زیر را نوشت:

$$\frac{۳}{۴} + \left(\frac{-۵}{۴}\right) = \frac{۳ + (-۵)}{۴}$$

اساس این درس بر این نکته استوار است که می توان جمع و تفریق عددهای گویا را به جمع و تفریق عددهای صحیح تبدیل کرد. به همین دلیل این درس تعمیمی از جمع و تفریق عددهای صحیح است و نکتهٔ تازه ای ندارد. در صورتی که دانش آموزان به جمع و تفریق عددهای صحیح تسلط داشته باشند، می توانند جمع بالا را به صورت خلاصه بنویسند:

$$\frac{۳}{۴} + \left(-\frac{۵}{۴}\right) = \frac{۳ - ۵}{۴}$$

همین کار را می توان برای جمع و تفریق چند کسر نیز انجام داد.

در کار در کلاس این بخش علاوه بر تمرین موارد فوق جمع و تفریق عددهای مخلوط هم مطرح شده است. وقتی چند عدد مخلوط گویا با هم جمع و تفریق می شوند، می توانیم عددهای صحیح آنها را با هم و عددهای مخلوط آنها را با هم جمع و تفریق کنیم.

انجام این کار نیاز به درک تفکیک بخش عدد صحیح و کسری یک عدد مخلوط دارد. به مثال های زیر توجه کنید:

$$۲\frac{۱}{۳} = ۲ + \frac{۱}{۳} \qquad\qquad -۲\frac{۱}{۳} = -۲ + (-\frac{۱}{۳})$$

یعنی در عدد $-۲\frac{۱}{۳}$ منفی هم برای عدد ۲ است هم برای $\frac{۱}{۳}$. حالا می توانیم جمع و تفریق عددهای مخلوط زیر را به جمع و تفریق عددهای صحیح و کسری تبدیل کنیم:

$$-\left(۲\frac{۱}{۳} + ۳\frac{۱}{۴} + (-۱)\frac{۷}{۱۲}\right) = \left(-۲ + ۳ + (-۱)\right) + \left(-\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + (-\frac{۷}{۱۲})\right)$$

در نهایت جمع و تفریق چند عدد مخلوط جمع و تفریق یک عدد صحیح و یک کسر خواهد بود که ٤ حالت زیر را خواهد داشت:

$$(-۲)+\left(-\frac{۱}{۳}\right)=-۲-\frac{۱}{۳}=-۲\frac{۱}{۳} \qquad (+۲)+\left(+\frac{۱}{۳}\right)=۲+\frac{۱}{۳}=۲\frac{۱}{۳}$$

$$(-۲)+\left(+\frac{۱}{۳}\right)=-۲+\frac{۱}{۳}=-۱\frac{۲}{۳} \qquad (+۲)+\left(-\frac{۱}{۳}\right)=۲-\frac{۱}{۳}=۱\frac{۲}{۳}$$

جمع و تفریق های مطرح شده در کار در کلاس این بخش مشابه بالا می باشد. بنابراین انتظار می رود دانش آموزی که جمع و تفریق عددهای صحیح را در هفتم یاد گرفته، جمع و تفریق کسر را در کلاس هشتم یاد گرفته، و در کار در کلاس به سؤال های مشابه جمع و تفریق های بالا جواب دهد، و بتواند جمع و تفریق هر تعداد عدد مخلوط را با ترکیب این سه مهارت انجام دهد.

حل بعضی از تمرین ها

در تمرین های این بخش سؤال های زیر اهمیت بیشتری دارند.

در سؤال دوم مفهوم تبدیل محاسبات کسری یا اعشاری به محاسبات عددهای صحیح به روش دیگری بیان شده است. جمع $-۰.۳+۰.۲$ را می توان به صورت جمع دو عدد صحیح تفسیر کرد. -۰.۳ یعنی -۳ تا ۰.۱ و ۰.۲ یعنی ۲ تا ۰.۱ پس می توان ۰.۱ را کنار گذاشت. به عبارت دیگر دو جمع زیر را می توان معادل در نظر گرفت:

$-۳+۲$ و $(-۳+۲)۰.۱=-۰.۳+۰.۲$

از این ویژگی در محاسبهٔ جمع و تفریق های عددهای اعشاری در سؤال های ۳ و ٤ می توان استفاده کرد.

توصیه های آموزشی

۱- همان طور که پیش از آن ذکر شد در هر قسمت که دانش آموزان با اشکالی مواجه می شدند، دوباره به جمع و تفریق کسرهای متعارفی (دبستان) و جمع و تفریق عددهای صحیح (کلاس هفتم) بازگردید و درس را از آنجا پیگیری کرده و رفع اشکال کنید.

۲- به ساده کردن قبل و بعد از عملیات جمع و تفریق تأکید کنید. این کار محاسبات دانش آموزان را ساده تر می کند.

۳- در صورتی که ماشین حساب هایی که عملیات کسری را انجام می دهند در اختیار دارید یک بار کار با آنها را به دانش آموزان آموزش دهید.

٤- تمرین ذهنی جمع و تفریق کسر و عدد مخلوط با مثال هایی مشابه موارد زیر تأکید و توصیه می شود:

$$-2-\frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{4}-\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \qquad -1+\frac{2}{3} \qquad 1-\frac{1}{4}$$

$$-14+0.5 \qquad 2-0.3 \qquad 2-0.5$$

۵- در توضیحات خود و تمرین های ذهنی دومورد زیر را بیشتر مورد توجه قرار دهیم.

$$-2+\frac{1}{3}=-1\frac{2}{3} \qquad\qquad -2\frac{1}{3}=-2-\frac{1}{3}$$

عمدهٔ اشکالات دانش آموزان به بدفهمی همین دومورد مربوط می شود.

اشتباهات رایج دانش آموزان

۱- یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان این است که اگر کسر اول منفی داشته باشد، این علامت را برای حاصل عبارت، منظور می کنند. به اشتباه یکی از دانش آموزان که در زیر آمده است، توجه کنید.

$$-\frac{۷}{۱۵}+\frac{۱۳}{۱۵}-\frac{۱}{۵}=-\frac{۷+۱۳-۱}{۱۵}$$

۲- درمحاسبهٔ جمع و تفریق عددهای اعشاری عددهای صحیح را با هم جمع و تفریق می کنند و کاری به قسمت اعشاری ندارند. مانند نمونهٔ نادرست زیر:

$$-۳+۲.۱=-۱.۱$$

همان طور که قبلاً بیان شد، ریشهٔ این بدفهمی در عدم درک درست از گسترده نویسی عددهای کسری و اعشاری است. جمع بالا را می توان به صورت مقابل گسترده کرد: $-۳+۲+۱.۰$

در این صورت حاصل عبارت $-۱+۰.۱$ است و حاصل این جمع -۱.۱ نمی شود، چرا که گستردهٔ -۱.۱ برابر است با $-۱-۰.۱$.

ضرب و تقسیم و عددهای گویا

هدف:

۱- تبدیل ضرب عددهای گویا به ضرب عددهای صحیح

۲- درک تعیین علامت ضرب دو عدد گویا

۳- محاسبهٔ ضرب دو عدد گویا

٤- تبدیل تقسیم دو عدد گویا به ضرب و تعیین علامت تقسیم دو عدد

۵- انجام محاسبهٔ تقسیم دو عدد گویا

٦- درک مفهوم معکوس و پیدا کردن معکوس عددهای گویا

۷- درک مفهوم ضرب عدد در معکوس آن

۸- انجام محاسبات عددهای گویا با رعایت ترتیب انجام عملیات

۹- آشنایی اولیه با کسرهای متناوب و مختوم.

ابزار مورد نیاز:

۱- محور عددهای گویا با تقسیم بندی های مختلف

۲- کاغذ رنگی یا مقوا برای نمایش کسرها و معکوس آنها.

روش تدریس

هدف کلی این درس انجام محاسبهٔ ضرب و تقسیم دو عدد گویا و در انتها ترکیب ٤ عمل اصلی روی عددهای گویا و انجام محاسبات مربوطه با رعایت ترتیب انجام عملیات است. ضمن آن که موضوع ضرب هر

عدد در معکوسش مطرح می شود و با کمک ماشین حساب دانش آموزان تفاوت کسرهای متناوب و مختوم را مشاهده می کنند.

فعالیت اول این درس به منظور تبدیل ضرب کسرها به ضرب عددهای صحیح است. هدف نهایی این کار درک تعیین علامت دو عدد گویا و مشابهت آن با تعیین علامت ضرب دو عدد صحیح است.

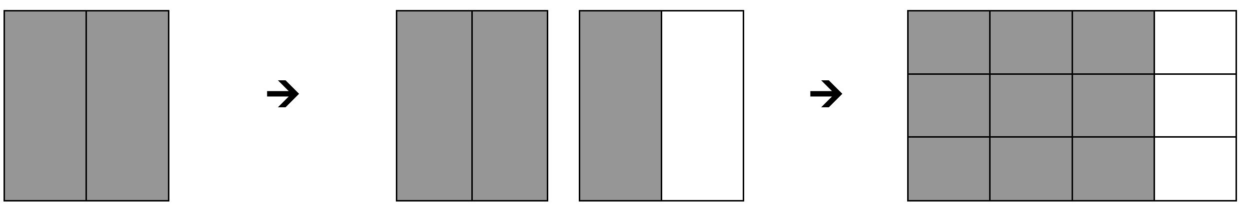
پس از این که این نتیجه کامل شد، می توان محاسبهٔ ضرب دو عدد گویا را به این خلاصه کرد. ابتدا علامت حاصل را پیدا می کنیم، سپس کسرها را بدون علامت در هم ضرب می کنیم. کار در کلاس این قسمت به همین موضوع پرداخته و دانش آموزان تمرین محاسبهٔ ضرب دو عدد گویا را انجام می دهند. در ضمن آن ضرب عددهای مخلوط نیز مطرح شده است.

در فعالیت دوم این درس موضوع تبدیل تقسیم دو عدد گویا به ضرب دو عدد گویا مطرح شده و نتیجه گیری می شود که تعیین علامت تقسیم مشابه ضرب است. پس از آن که می توان محاسبهٔ تقسیم دو عدد گویا را تمرین کرد، برای این کار لازم است معکوس یک عدد گویا مطرح شود، چرا که قبل از این دانش آموزان فقط معکوس کسرها را دیده بودند.

پس از معرفی معکوس یک عدد، موضوع ضرب یک عدد در معکوسش و برابر شدن با عدد یک، تمرین شده است. در کار در کلاس این قسمت علاوه بر محاسبهٔ تقسیم دو عدد گویا پیدا کردن معکوس کسرها نیز تمرین شده است. نکتهٔ مهم این است که حاصل تقسیم عدد یک بر هر عدد غیر صفر برابر معکوس آن می شود. برای مثال $1 \div \frac{-2}{3}$ برابر خواهد شد با معکوس $-\frac{2}{3}$ یعنی $-\frac{3}{2}$.

در فعالیت آخر این درس، ۲ نکته مطرح شده است: اول آن که به کمک ماشین حساب و تقسیم صورت و مخرج کسرها، عددهای اعشاری متناوب و غیر متناوب را ببینند و به کمک آن، کسرها را طبقه بندی کنند. در سؤال دوم شکل تصویری مفهوم هر عدد در معکوسش برابر یک می شود را مشاهده می کنند. در شکل زیر چگونگی این کار به تفصیل توضیح داده شده است.

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$



همین کار را به روش دیگری نیز می توان انجام داد.

حل بعضی از تمرین ها

در تمرین سوم دو سؤال زیر اهمیت بیشتری دارند. محاسبهٔ جمع و تفریق زیر در واقع مرحله ای از انجام جمع و تفریق ۳ عدد مخلوط بوده است، که در آن $(-\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۵} - \frac{۱}{۱۵}) + (-۲ + ۳ - ۷)$ عددهای صحیح با هم و قسمت های کسری با هم جمع و تفریق شده اند. پس می توان این طور فرض کرد که عبارت بالا حاصل جمع این سه عدد مخلوط است: $-۲\frac{۱}{۳} + ۳\frac{۲}{۵} - ۷\frac{۱}{۱۵}$

تمرین مقابل نیز اهمیت دارد: $-۱\frac{۲}{۳} - ۱\frac{۱}{۴} \times \frac{-۸}{۵} =$

در انجام این تمرین ترتیب انجام عملیات مهم است. یعنی دانش آموزان باید ابتدا عمل ضرب را انجام دهند، سپس جمع و تفریق نهایی انجام شود.

$$-۱\frac{۲}{۳} + \left(\frac{۵}{۴} \times \frac{۸}{۵}\right) = -۱\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۱}{۳}$$

توصیه های آموزشی

۱- مجدداً تأکید می شود که عملیات ضرب و تقسیم عددهای گویا به ضرب و تقسیم عددهای صحیح و کسر متعارفی برگردانید و درس را از آنجا شروع کنید.

۲- محاسبات ذهنی و محاسبات تقریبی در این قسمت نیز مانند جمع و تفریق توصیه می شود.

۳- کار با ماشین حساب هایی که عملیات کسری را انجام می دهند نیز توصیه می شود.

٤- کامل کردن تمرین های کتاب با مشابه سازی به جهت کسب مهارت نیز توصیه می شود.

اشتباهات رایج دانش آموزان

۱- بیشتر اشتباهات دانش آموزان در انجام محاسبات ضرب و تقسیم به تعیین علامت مربوط می شود.

۲- یکی دیگر از اشتباهات آنها در تشخیص معکوس عددها است. به موارد نادرست زیر توجه کنید:

$$-\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{3} \qquad -1\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} 1\frac{1}{2} \qquad 1\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} 1\frac{3}{2}$$

۳- مهم ترین اشتباه رایج دانش آموزان عدم رعایت ترتیب انجام عملیات است. در مثال های زیر ابتدا باید ضرب و تقسیم ها انجام شود، سپس جمع و تفریق.

$$1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

درست $1 - \frac{1}{6}$

نادرست $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$